Variedades tóricas proyectivas y dualidad.

Mathias Bourel

Orientadores: Dra. Alicia Dickenstein - Universidad de Buenos Aires
Dr. Alvaro Rittatore - Universidad de la República

Marzo 2007

Maestría en Matemática
PEDECIBA Matemática
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

La teoría de dualidad de variedades proyectivas, en particular de cónicas planas, es un tema clásico de la geometría ([**11**], [**18**]). Por otro lado, y bajo distintas apariencias, las variedades proyectivas duales han sido consideradas en varias ramas de la matemática.

En este trabajo nos concentramos en el estudio de la dualidad en el contexto de las variedades tóricas proyectivas. En particular, clasificamos y damos una descripción completa de las variedades tóricas autoduales. Esta clasificación nos permite construir familias infinitas de variedades tóricas autoduales no lisas, ampliando de este modo las familias de variedades autoduales conocidas hasta el momento.

Índice general

Introducción

La teoría de dualidad de variedades proyectivas, en particular de cónicas planas, es un tema clásico de la geometría $\big($[**11**], [**18**]$\big)$. Por otro lado, y bajo distintas apariencias, las variedades proyectivas duales han sido consideradas en varias ramas de la matemática. De hecho, la variedad dual es la generalización en el dominio de la geometría algebraica de la transformada de Legendre en mecánica clásica; la bidualidad proyectiva corresponde a los puntos de vista de Lagrange y Hamilton-Jacobi en mecánica clásica $\big($[**16**],[**18**]$\big)$.
La *variedad dual* X^* de una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ está definida como la clausura del conjunto de los hiperplanos - identificados con los puntos de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})^*$- que son tangentes a algún punto liso de X. Independientemente de la dimensión de X, la codimensión esperada de X^* es 1, o sea genéricamente X^* es una hipersuperficie $\big($[**11**, página 14]$\big)$. El *defecto* de X $\big($[**13**, Lecture 15]$\big)$ se define como la diferencia entre esta codimensión esperada y la codimensión efectiva de X^*. Las variedades con defecto positivo, llamadas *defectivas*, son muy particulares y es de gran interés clasificarlas. Este problema de clasificación está aún abierto en general.
También es de gran interés estudiar condiciones para que la variedad $X \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ sea *autodual*, o sea condiciones para que exista un isomorfismo lineal f de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})^*$, tal que $f(X) = X^*$ (Definición 2.7). La clasificación de las variedades autoduales lisas fue desarrollada por Ein en [**7**] y [**8**], obteniéndose una lista interesante pero pequeña. Hay pocos ejemplos en general de variedades no lisas autoduales $\big($[**16**], [**17**]$\big)$.
Por variedad tórica proyectiva entenderemos la clausura de la órbita de un punto por la acción de un toro algebraico T en el espacio proyectivo construido a partir de un T- módulo (Definiciones 1.14 y 1.28). Nos interesaremos en un caso particular de variedades tóricas proyectiva −estudiadas en [**10**] y [**11**]− que pueden ser parametrizadas a partir de una matrices enteras y que denotamos como X_A donde A es la matriz entera que se define (Definición 1.28). La clasificación general de variedades tóricas defectivas lisas ha sido obtenida en [**5**] y en [**6**]. Existe una clasificación combinatoria en el caso tórico general en [**4**], que extiende los resultados de [**3**] en el caso de codimensión dos. Estos resultados fueron extendidos para dar una clasificación completa en el caso de codimensiones tres y cuatro en [**2**].
Por otro lado el estudio y la comprensión de las variedades tóricas proyectivas del tipo X_A y sus variedades duales tienen gran interés en el área del álgebra computacional, dada su relación con el estudio de los sistemas de ecuaciones polinomiales.
En este trabajo nos concentramos en el estudio de la dualidad en el contexto de las variedades tóricas proyectivas. En particular, clasificamos y damos una descripción completa de las variedades tóricas autoduales, sin hipótesis de regularidad para la

variedad X_A. Esta clasificación nos permite construir familias infinitas de variedades tóricas autoduales no lisas, ampliando de este modo las familias de variedades autoduales conocidas hasta el momento.
El trabajo está organizado de la siguiente manera. En las dos primeras secciones del capítulo 1 exponemos los resultados de grupos algebraicos y de variedades tóricas proyectivas necesarios para la lectura de la monografía. En particular estudiamos las representaciones de un toro, visto como un grupo algebraico para luego interpretar en términos de coordenadas los resultados expuestos anteriormente y relacionarlos con la teoría desarrollada por Gelfand, Kapranov y Zelevinsky en [**11**]. En el capítulo 2, nos concentramos en la teoría general de dualidad proyectiva y nos focalizamos en el caso de las variedades tóricas del tipo X_A, explicitando y refinando resultados conocidos. En particular, exhibimos de modo explícito una parametrización racional de la variedad dual de una variedad tórica del tipo X_A a partir del núcleo de A (Teorema 2.11). Este resultado $-$ extraído de [**4**] $-$ nos será de gran utilidad en los capítulos siguientes. Terminamos este capítulo tratando el caso en que el núcleo de A está contenido en algún hiperplano coordenado (tales matrices se llaman *piramidales*), mostrando en particular cuáles son las consecuencias de este hecho sobre la geometría de la variedad dual de X_A. El capítulo 3 es el capítulo "medular" del trabajo. En él damos la clasificación de las variedades tóricas autoduales en el caso general. En la primera sección, bajo la hipótesis en que la matriz A no sea piramidal, probamos que X_A es autodual si y sólo si las variedades X_A y X_A^* tienen igual dimensión (Teorema 3.3), y también caracterizamos las variedades autoduales en términos de una descripción geométrica de una matriz dual de Gale de A $-$matriz cuyas columnas forman una base de $Ker_{\mathbb{Z}}(A)-$ (Teorema 3.7). En la sección 2 presentamos el caso general, eliminando la hipótesis que la matriz A no sea piramidal; el resultado principal de este capítulo es el Teorema 3.11 que caracteriza completamente las variedades tóricas del tipo X_A que son autoduales. En la sección 3 incluímos varios ejemplos de variedades autoduales proyectivas: variedad de Segre, variedades asociadas a matrices de Lawrence (Definición 3.14), etc. y construímos familias de variedades autoduales singulares, ampliando de esta manera la lista hasta ahora conocida y dada por Ein ([**7**] y [**8**]). Finalizamos este capítulo con la sección 4 con la noción de variedad *fuertemente autodual.* Decimos que X_A es fuertemente autodual cuando coincide con X_A^* $-$identificando $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})^*$ en la forma estandar$-$ (Definición 3.24). A lo largo de toda la exposición presentamos asimismo ejemplos que ilustran los distintos conceptos.

Trabajaremos en el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, y $\mathbb{C}[X]$ denotará el álgebra de funciones sobre una variedad algebraica afín X. A menos que se explicite lo contrario, por variedad algebraica entenderemos una variedad algebraica sobre $\mathbb{C}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos el tipo de variedades tóricas proyectivas con las cuales trabajamos a lo largo de esta monografía. En la sección 1 repasamos brevemente, con el objetivo de fijar notaciones, algunos resultados relativos a la acción de un toro algebraico sobre un espacio vectorial. Luego, en la sección 2, definimos nuestro objeto de estudio, las variedades tóricas proyectivas asociadas a un conjunto de pesos de la representación (Definición 1.28) y estudiamos algunas de sus propiedades. En la sección 3, tratamos el caso particular en que el toro es $(\mathbb{C}^*)^d$ y el espacio vectorial es $\mathbb{P}^{n-1}$, con el objetivo de traducir explicitamente las propiedades vistas en la sección 2 y relacionarlas con la teoría que se desarrolla en [**11**], lo cual será fundamental en los capítulos posteriores. Finalmente, en la sección 3, estudiamos cuando estas variedades son lisas.

1. Notaciones

En esta parte, con el objetivo de fijar notaciones, definiremos e introduciremos muy rápidamente algunos resultados elementales de la teoría de representaciones de grupos y de grupos algebraicos. Recomendamos al lector interesado en completar la teoría y los resultados presentados consultar, por ejemplo, [**15**].

Definición 1.1. *Un grupo algebraico* G es un grupo abstracto $(G, \mu, 1)$, siendo 1 el elemento neutro de G, y donde G es una variedad algebraica tal que los mapas multiplicación

$$\begin{array}{rccc} \mu : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

e inversión

$$\begin{array}{rccc} \iota : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

son morfismos de variedades algebraicas.
Si la variedad algebraica es afín decimos que G es un *grupo algebraico afín.*

Definición 1.2. Llamaremos *toro d-dimensional* a un grupo algebraico afín T isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^d$.
Si $T = (\mathbb{C}^*)^d$, la operación que se considera es la multiplicación coordenada a coordenada, es decir:

$$(t_1, \ldots, t_d) \cdot (s_1, \ldots, s_d) = (t_1 s_1, \ldots, t_d s_d).$$

Observación 1.3. En la bibliografía existente hay muchas definiciones equivalentes de los toros algebraicos. Por ejemplo pueden definirse como los subgrupos cerrados de D_n, $n \in \mathbb{N}$, donde D_n denota el subgrupo formado por las matrices diagonales de $GL_n(\mathbb{C})$.

Definición 1.4. Sea G un grupo algebraico. El conjunto

$$\mathfrak{X}(G) = \{\chi : G \to \mathbb{C}^* \ : \ \chi \text{ es morfismo de grupos algebraicos}\}$$

se llama *grupo de caracteres* de G. Notaremos como $\mathbf{1}$ al caracter trivial, $\mathbf{1}(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Proposición 1.5. *Si G es un grupo algebraico entonces:*

1. $\mathfrak{X}(G)$ *es un grupo abeliano multiplicativo de los invertibles de* $\mathbb{C}[G]$.
2. $\mathfrak{X}(G) \subset \mathbb{C}[G]$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Ver [**15**], capítulo 6, página 102. □

Proposición 1.6. *Si T es un toro d-dimensional entonces*

1. $\mathfrak{X}(T)$ *es un grupo abeliano libre de rango d.*
2. $\mathbb{C}[T] = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(T)} \mathbb{C}\chi$.

Demostración. Ver [**1**], página 114 o [**15**], capítulo 6, página 104 . □

Lema 1.7. *Si $T = (\mathbb{C}^*)^d$ entonces los caracteres de T son exactamente los morfismos de la forma:*

$$\chi^a : (t_1, \ldots, t_d) \mapsto t_1^{a_1} t_2^{a_2} \ldots t_d^{a_d}$$

donde $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Demostración. Supongamos que $d = 1$. Sea $\chi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ un morfismo de grupos algebraicos definido por $\chi(t) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ con $\alpha_m \neq 0$. Al ser morfismo de grupos, se tiene que $\chi(ts) = \chi(t)\chi(s)\ \forall\ t, s \in \mathbb{C}^*$. Entonces $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i t^i s^i = \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i s^i\right)$. Esta igualdad pensada como igualdad de polinomios en $\mathbb{C}[t][s]$ implica que $\alpha_m = 1$ y que $\alpha_{m-1} = \cdots = \alpha_0 = 0$, luego $\chi(t) = t^m$.
Si χ es un polinomio no nulo de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t^n\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t^n\chi(t) = t^m$, es decir $\chi(t) = t^{m-n}$.
Si $d \geq 2$, sea $\chi \in \mathrm{Hom}_{gr.\,alg}\big((\mathbb{C}^*)^d, \mathbb{C}^*\big)$. Al ser χ morfismo de grupos se tiene que cumplir:

$$\chi(t_1, t_2, \ldots, t_d) = \chi(t_1, 1, \ldots, 1)\chi(1, t_2, 1, \ldots, 1) \ldots \chi(1, \ldots, 1, t_d).$$

Por la parte anterior, existen $a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\chi(t_1, 1, \ldots, 1) = t_1^{a_1},\ \chi(1, t_2, 1, \ldots, 1) = t_2^{a_2},\ \ldots,\ \chi(1, \ldots, 1, t_d) = t_d^{a_d}.$$

Entonces $\chi(t_1, t_2, \ldots, t_d) = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \ldots t_d^{a_d}$.

□

PROPOSICIÓN 1.8. *Sea T un toro y $H \subset T$ un subgrupo cerrado. Entonces:*

1. *T/H es un toro.*
2. *Si H es conexo entonces H es un toro.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**1**] página 114 o [**15**], capítulo 6, página 104. □

DEFINICIÓN 1.9. Sea G un grupo algebraico y X una variedad algebraica. Una *acción regular* de G en X es un morfismo de variedades algebraicas $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ que es además una acción del grupo abstracto G en X:

$$\varphi(g_1g_2, x) = \varphi\big(g_1, \varphi(g_2, x)\big) \ \forall\, x \in X, \ \forall\, g_1, g_2 \in G$$

y

$$\varphi(1, x) = x, \ \forall\, x \in X.$$

Decimos también que X es una *G-variedad*. Por comodidad en las notaciones escribimos $\varphi(g, x) = g \cdot x$.

DEFINICIÓN 1.10. Sean X e Y dos G-variedades. El morfismo $\varphi : X \to Y$ es *G-equivariante* o *de G-variedades* si $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $g \in G$.

DEFINICIÓN 1.11. La *órbita* de un punto x es el conjunto

$$\mathcal{O}_G(x) = G \cdot x = \{g \cdot x : \ g \in G\},$$

que puede verse como la imagen del morfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & G & \longrightarrow & X \\ & g & \mapsto & \varphi_x(g) = g \cdot x \end{array}.$$

Cuando no hay confusión sobre el grupo algebraico G, denotaremos la órbita de x simplemente por $\mathcal{O}(x)$.
El *estabilizador* de $x \in X$ o *grupo de isotropía* de x es el conjunto $G_x = \varphi_x^{-1}(\{x\}) = \{g \in G : \ g \cdot x = x\}$; es un subgrupo cerrado de G.

LEMA 1.12. *Sea G un grupo algebraico afín actuando regularmente en una variedad algebraica X. Entonces, para cada $x \in X$, la órbita $\mathcal{O}(x)$ es abierta en su adherencia y su borde $\overline{\mathcal{O}(x)} \setminus \mathcal{O}(x)$ es unión de órbitas de dimensión menor. En particular, $\mathcal{O}(x)$ es una variedad algebraica para cada $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**15**], capítulo 2, página 60. □

COROLARIO 1.13. *Toda acción regular de un grupo algebraico afín G en una variedad algebraica X tiene órbitas cerradas.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**15**], capítulo 2, página 60. □

DEFINICIÓN 1.14. Una variedad algebraica irreducible X es una *variedad tórica* si X es una T-variedad, siendo T un toro algebraico, y existe $x_0 \in X$ tal que $\mathcal{O}(x_0)$ es abierta $-$ y por lo tanto densa $-$ en X.

Nótese que no estamos exigiendo la normalidad de X como variedad algebraica a diferencia de la definición usual encontrada en la literatura.

Definición 1.15. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, considerado como variedad algebraica afín. Si G es un grupo algebraico afín que actúa regularmente en V por transformaciones lineales decimos que V es un *G-módulo racional* o una *representación racional*. En otras palabras, un G-módulo racional es una representación de G como grupo abstracto tal que el morfismo $\varphi : G \times V \to V$ es un morfismo de variedades algebraicas.

Toda representación $\varphi : G \times V \to V$ se corresponde con un morfismo de grupos algebraicos $\rho_\varphi : G \to GL(V)$ dado por $\rho_\varphi(g)(v) = \varphi(g, v) = g \cdot v$ para todo $g \in G$ y para todo $v \in V$.

Definición 1.16. Sean $\rho : G \to GL(V)$ y $\rho' : G \to GL(V')$ dos representaciones racionales de un grupo G en espacios vectoriales V y V'. Se dice que estas representaciones son *isomorfas* si existe un isomorfismo lineal G-equivariante $f : V \to V'$.

Definición 1.17. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación racional y W un subespacio vectorial de V. Decimos que W es *G-estable* si para todo $w \in W$ se tiene que $\rho(g)(w) \in W$ para todo $g \in G$.

Definición 1.18. Una representación lineal $\rho : G \to GL(V)$ se dice *irreducible* si $V \neq 0$ y ningún subespacio no trivial de V es G-estable.

Ejemplo 1.19. Sea T un toro d-dimensional y χ un caracter. Definimos *la representación irreducible asociada a χ*, que notamos $\mathbb{C}_\chi$, de la siguiente manera: $\mathbb{C}_\chi$ coincide con $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}-$espacio vectorial y $t \cdot v = \chi(t)v$ para todo $v \in \mathbb{C}_\chi$ y $t \in T$. Claramente $\mathbb{C}_\chi$ es irreducible, y si $\chi \neq \mu$ entonces $\mathbb{C}_\chi \not\cong \mathbb{C}_\mu$ como T-módulos.

Proposición 1.20. *Sea T un toro algebraico de dimensión d y V un T-módulo racional. Entonces existen $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathfrak{X}(T)$ caracteres posiblemente repetidos tales que:*

$$V \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\chi_i}.$$

Si $V \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\mu_i}$ entonces $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$.

Demostración. Ver [**15**], capítulo 6. □

Definición 1.21. En el contexto de la proposición anterior decimos que $\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ son *los pesos de la representación*.

Definición 1.22. Sea $A = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\} \subset \mathfrak{X}(T)$ un conjunto de caracteres, posiblemente repetidos. Definimos:

$$V_A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\chi_i}.$$

La proposición 1.20 puede leerse entonces como sigue:

Proposición 1.23. *Sea V un T-módulo racional de dimensión finita. Entonces existen caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathfrak{X}(T)$, posiblemente repetidos, tal que $V \simeq V_{\{\chi_1, \ldots, \chi_n\}}$.*

En virtud de la proposición anterior, de ahora en adelante por conjunto de caracteres o pesos, entenderemos un conjunto con posibles repeticiones.

Observación 1.24. En el caso que $T = (\mathbb{C}^*)^d$, como cada caracter χ se escribe como $\chi(t) = t^u$ para algún $u \in \mathbb{Z}^d$, identificaremos el conjunto de pesos $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ con una matriz $A = (u_1|\dots|u_n) \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})_{d\times n}$.

2. Variedades tóricas proyectivas

De aquí en adelante $\rho : T \to GL(V)$ denota una representación racional de un toro algebraico T sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, $A = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ es el conjunto de pesos y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de vectores propios asociada (i.e: $t \cdot v_i = \rho(t)(v_i) = \chi_i(t)v_i$ para todo $t \in T$). Recordamos que si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial definimos $\mathbb{P}(V) = \big(V \setminus \{0\}\big) \ / \ \sim$, siendo $\sim$ la siguiente relación de equivalencia: $v \sim w$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{C}^*$ tal que $u = kv$. Denotaremos por $[v]$ a la clase de un vector $v \in V$ y $\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ al morfismo canónico definido por $\pi(v) = [v]$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

Observación 1.25. Si $\rho : T \to GL(V)$ es una representación lineal de un toro algebraico T en un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces ρ induce una acción de T sobre $\mathbb{P}(V)$ dada por:

$$\psi : T \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V), \ \ \psi\big(t, [v]\big) = \big[\rho(t)(v)\big],$$

En efecto observemos que $\big[\rho(t)(\alpha v)\big] = \big[\alpha\big(\rho(t)(v)\big)\big] = \big[\rho(t)(v)\big] \ \ \forall\, \alpha \neq 0.$
Abreviamos $\big[\rho(t)(v)\big] = t \cdot_\rho [v]$ y si la representación está sobreentendida simplemente $t \cdot [v]$.

Si $V_A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\chi_i}$, donde $\chi_i \in \mathcal{X}(T)$, entonces:

$$t \cdot_\rho \left[\sum_{i=1}^{n} p_i v_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \rho(t) v_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \chi_i(t) v_i\right].$$

Tomando coordenadas en la base de vectores propios $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e identificando $\mathbb{P}(V_A)$ con $\mathbb{P}^{n-1}$ obtenemos:

$$t \cdot_\rho [p_1 : p_2 : \cdots : p_n] = [\chi_1(t)p_1 : \chi_2(t)p_2 : \cdots : \chi_n(t)p_n]\,.$$

Si $T = (\mathbb{C}^*)^d$, y $A = \{\chi_1, \dots, \chi_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ el conjunto de pesos de V_A con $\chi_i(t) = t^{u_i}$, $u_i \in \mathbb{Z}^d$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces en las coordenadas elegidas, la igualdad anterior se expresa como

$$t \cdot_\rho [p_1 : \cdots : p_n] = [t^{u_1}p_1 : t^{u_2}p_2 : \cdots : t^{u_n}p_n].$$

Lema 1.26. *Sea $\rho : T \to GL(V)$ una representación racional de dimensión finita de un toro T. Consideramos $S = \mathbb{C}^* \times T$ y la representación:*

$$\varphi : S \times V \to V, \ \ \varphi\big((s,t), v\big) = s\big(\rho(t)(v)\big).$$

Entonces V es también una representación de S y en $\mathbb{P}(V)$ las S-órbitas y las T-órbitas coinciden.

Más aún si $V_A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\chi_i}$ *con pesos* $\chi_i \in \mathcal{X}(T)$, $i = 1, \ldots, n$, *entonces* V_A *es también una representación de* S, *con pesos* $\lambda_i \in \mathcal{X}(S) = \mathbb{Z} \times \mathcal{X}(T)$ *con* $\lambda_i(s,t) = s\chi_i(t)$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$, $V_A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\lambda_i}$.

Demostración. Es claro, dada la definición de φ que las $S-$órbitas y las $T-$órbitas coinciden en $\mathbb{P}(V)$, ya que

$$\varphi\big((s,t),[v]\big) = \big[\varphi\big((s,t),v\big)\big] = [s\rho(t)v] = [\rho(t)v].$$

Consideremos $V_A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\chi_i}$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de vectores propios tal que $\mathbb{C}_{\chi_i} = \langle v_i \rangle$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\varphi\big((s,t),v_i\big) = s\rho(t)(v_i) = s\chi_i(t)v_i.$$

Es decir v_i es un vector propio para el peso $\lambda_i \in \mathcal{X}(S) = \mathbb{Z} \times \mathcal{X}(T)$, de donde se verifica la primer afirmación.
Por otro lado si $v = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$ se tiene que

$$\rho(t)(v) = \rho(t)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \rho(t)(v_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \chi_i(t) v_i$$

y

$$\varphi\big((s,t),v\big) = \varphi\left((s,t), \sum_{i=1}^{n} p_i v_i\right) = s\sum_{i=1}^{n} p_i \rho(t)(v_i) = s\sum_{i=1}^{n} p_i \chi_i(t) v_i.$$

□

Observación 1.27. En las notaciones de la Proposición 1.26, si $v \in V \setminus \{0\}$ entonces

$$S \cdot v = \big\{\alpha(t \cdot v) : t \in T,\ \alpha \in \mathbb{C}^*\big\}.$$

En particular, $\mathbb{C}^* v \subset S \cdot v$ para todo $v \in V$, es decir la S-órbita de un vector no nulo contiene a la recta de dirección v sin el origen.

Definición 1.28. Si $V_A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\chi_i}$, $\langle v_i \rangle = \mathbb{C}_{\chi_i}$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, definimos la *variedad tórica proyectiva asociada al conjunto de pesos* $A = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ como:

$$X_A = \overline{\mathcal{O}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} v_i\right]\right)} \subset \mathbb{P}(V_A).$$

Si $t \in T$ entonces

$$t \cdot_\rho \left[\sum_{i=1}^{n} v_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} \rho(t) v_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} \chi_i(t) v_i\right],$$

En particular, tomando coordenadas en la base B tenemos que

$$t \cdot_\rho [1 : 1 : \cdots : 1] = [\chi_1(t) : \chi_2(t) : \cdots : \chi_n(t)] \text{ y } X_A = \overline{\mathcal{O}\left([1 : 1 : \cdots : 1]\right)}.$$

Más aún, si $T=(\mathbb{C}^*)^d$ entonces $t\cdot_\rho[1:1:\cdots:1]=[t^{u_1}:t^{u_2}:\cdots:t^{u_n}]$.

Veamos dos lemas importantes que nos permitirán hacer suposiciones sobre estas variedades tóricas en lo que sigue.

Lema 1.29. *Con las notaciones anteriores tenemos:*

$$Ker(\rho)=T_{\sum\limits_{i=1}^n v_i},$$

donde $T_{\sum\limits_{i=1}^n v_i}$ *es el grupo de isotropía de* $\sum\limits_{i=1}^n v_i$ *para la acción de* T.

Demostración. Al ser $Ker(\rho)=\bigcap\limits_{v\in V_A}T_v$ tenemos que $Ker(\rho)\subset T_{\sum\limits_{i=1}^n v_i}$. Si $t\in T_{\sum\limits_{i=1}^n v_i}$, entonces por un lado $\rho(t)\left(\sum\limits_{i=1}^n v_i\right)=\sum v_i$ y por otro $\rho(t)\left(\sum\limits_{i=1}^n v_i\right)=\sum\limits_{i=1}^n\chi_i(t)v_i$, por lo que $\chi_i(t)=1$ para todo $i=1,\dots,n$. Si $v=\sum\limits_{i=1}^n p_iv_i$ entonces

$$\rho(t)v=\rho(t)\left(\sum_{i=1}^n p_iv_i\right)=\sum_{i=1}^n p_i\chi_i(t)v_i=\sum_{i=1}^n p_iv_i=v.$$

Luego $\rho(t)(v)=v$ para todo $v\in V_A$, es decir $t\in Ker(\rho)$. □

Observación 1.30. Consideremos el morfismo de grupos algebraicos $\theta:T\to(\mathbb{C}^*)^n$ dado por

$$\theta(t)=\big(\chi_1(t),\chi_2(t),\dots,\chi_n(t)\big).$$

Si $t\in Ker(\theta)$ entonces $\chi_i(t)=1\ \forall\ i=1,\dots,n$ y, conservando las notaciones anteriores,

$$t\in Ker(\theta)\Leftrightarrow\ \rho(t)\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)=\sum_{i=1}^n\chi_i(t)v_i=\sum_{i=1}^n v_i\ \Leftrightarrow\ t\in Ker(\rho),$$

es decir $Ker(\theta)=Ker(\rho)$.

Lema 1.31. *Con las notaciones anteriores,* $\big\langle\chi_1,\dots,\chi_n\big\rangle_{\mathbb{Z}}=\mathfrak{X}(T)$ *si y sólo si* $Ker(\rho)=\{1\}$.

Demostración. El morfismo de grupos algebraicos $\theta:T\to(\mathbb{C}^*)^n$ dado por $\theta(t)=\big(\chi_1(t),\chi_2(t),\dots,\chi_n(t)\big)$ induce un morfismo de álgebras $\theta^*:\mathbb{C}\big[(\mathbb{C}^*)^n\big]\to\mathbb{C}[T]$. Es claro que

$$Im(\theta^*)=\theta^*\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{C}x^a\right)=\sum_{\chi\in\langle\chi_1,\dots,\chi_n\rangle_{\mathbb{Z}}}\mathbb{C}\chi\subset\mathbb{C}[T]=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(T)}\mathbb{C}\chi.$$

Luego $\langle\chi_1,\dots,\chi_n\rangle=\mathfrak{X}(T)$ si y sólo si $Im(\theta^*)=\mathbb{C}[T]$, lo que es equivalente a que el morfismo θ sea inyectivo. Por ser θ un morfismo de grupos algebraicos, esto último es equivalente a $Ker(\theta)=\{1\}$; por la Observación 1.30 es entonces equivalente a $Ker(\rho)=\{1\}$. □

Observación 1.32. Si $\pi : S \to T$ es un morfismo de grupos algebraicos sobreyectivo y $\rho : T \to GL(V)$ es una representación de T, entonces la representación de S

$$\rho \circ \pi : S \to T \to GL(V)$$

tiene las mismas órbitas que la representación de T.
La representación $\rho : T \to GL(V)$ induce una representación

$$\tilde{\rho} : \ T/Ker(\rho) \to GL(V).$$

Como las órbitas de T y $T/Ker(\rho)$ en V son las mismas podemos suponer que $\rho : T \to GL(V)$ es inyectiva.

Observación 1.33. En las hipótesis del Lema 1.31, $T_{\sum v_i} = \{1\}$; luego $\mathcal{O}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\right) \cong T/T_{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i} = T$ como T-variedades.

Por lo tanto, la variedad $X_A = \overline{\mathcal{O}\left(\left[\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\right]\right)}$ es una variedad tórica proyectiva irreducible de dimensión $d = \dim(T)$.

A partir de ahora supondremos que $Ker(\rho) = \{1\}$, o sea que la representacin ρ es fiel −i.e. el morfimso ρ es inyectivo−.

Si $\{\mu_1, \ldots, \mu_d\}$ es una base de $\mathcal{X}(T)$, entonces cada peso $\chi \in \mathcal{X}(T)$ se escribe como combinación lineal de estos elementos. Luego si $A = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$, entonces $\chi_i = \sum\limits_{j=1}^{d} u_{ji}\mu_j$, es decir $\chi_i(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} \mu_j(t)^{u_{ji}}$.

Proposición 1.34. *Sea T un toro algebraico y consideramos $V_A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{C}_{\chi_i}$.*

Si $\{\mu_1, \ldots, \mu_d\}$ es una base de $\mathcal{X}(T)$ escribimos $\chi_i = \sum\limits_{j=1}^{d} u_{ji}\mu_j$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{Q}$ un conjunto arbitrario de racionales con la propiedad siguiente: $\sum\limits_{j=1}^{d} \alpha_j u_{ji} \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Definimos una acción de $\mathbb{C}^* \times T$ en V_A de la siguiente forma: si $v \in \mathbb{C}_{\chi_i}$, entonces

$$(s,t) \cdot v = s^{\sum_{j=1}^{d} \alpha_j u_{ji}}\, t \cdot v_i,$$

y luego la acción se extiende linealmente.

Entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^* \times T}(v) = \mathcal{O}_T(v)$ para todo $v \in V_A$.

Demostración. Supongamos que todos los escalares α_i tienen igual denominador, es decir, $\alpha_i = \frac{\alpha_i'}{h}$ para todo $i = 1, \ldots, d$ y dado $s \in \mathbb{C}^*$, sea ξ una raíz h-ésima de s, es decir $\xi^h = s$. Entonces $s^{\alpha_i} = \xi^{\alpha_i'}$.

Un cálculo directo muestra que si $v \in \mathbb{C}_{\chi_i}$:

$$(s,t)\cdot v = \prod_{j=1}^{d}\big(s^{\alpha_j}\mu_j(t)\big)^{u_{ji}} v.$$

En forma semejante:

$$t\cdot v = \prod_{j=1}^{d}\mu_j(t)^{u_{ji}} v.$$

Sea $v \in V_A$ y $x \in \mathcal{O}_T(v)$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{d} \mu_j(t)^{u_{ji}} v_i$. para algún $t \in T$. Luego,

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{d}\mu_j(t)^{u_{ji}} v_i = (1,t)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right),$$

es decir $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*\times T}(v)$.
Supongamos que $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*\times T}(v)$, es decir $x = (s,t)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{d}\big(s^{\alpha_j}\mu_j(t)\big)^{u_{ji}} v_i$ para algún $(s,t) \in \mathbb{C}^* \times T$. Siguiendo el mismo razonamiento que en la prueba del Lema 1.31, como $\mu_1,\dots,\mu_d$ es una base de $\mathcal{X}(T)$, se tiene que el morfismo $(\mu_1,\dots,\mu_d) : T \to (\mathbb{C}^*)^d$ es inyectivo, luego biyectivo, por lo que existe $t' \in T$ tal que: $\begin{cases} \mu_1(t') = s^{\alpha_1}\mu_1(t) \\ \mu_2(t') = s^{\alpha_2}\mu_2(t) \\ \qquad\vdots \\ \mu_d(t') = s^{\alpha_d}\mu_d(t) \end{cases}$ o sea $\begin{cases} \mu_1(t') = \xi^{\alpha_1'}\mu_1(t) \\ \mu_2(t') = \xi^{\alpha_2'}\mu_2(t) \\ \qquad\vdots \\ \mu_d(t') = \xi^{\alpha_d'}\mu_d(t) \end{cases}$. Entonces existe $t' \in T$ tal que

$$\rho(t')(v) = \sum_i a_i \prod_{j=1}^{d}\big(\mu_j(t')\big)^{u_{ji}} v_i = \sum_i a_i \prod_{j=1}^{d}\big(s^{\alpha_i}\mu_j(t)\big)^{u_{ji}} v_i = (s,t)\cdot v = x,$$

es decir $x \in \mathcal{O}_T(v)$. $\square$

3. Cálculos explícitos: el caso $T = (\mathbb{C}^*)^d$ y $V = \mathbb{C}^n$

En esta sección interpretaremos en términos de coordenadas en una base de vectores propios los resultados obtenidos en la sección anterior. Esto nos permitirá relacionarlos con la teoría desarrollada por Gelfand, Kapranov y Zelevinsky en [**11**]. Suponemos que $T = (\mathbb{C}^*)^d$ e identificamos $\mathcal{X}(T)$ con $\mathbb{Z}^d$. Recordamos que un conjunto de pesos $A = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ de una representación racional de $(\mathbb{C}^*)^d$ se identifica con un conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{Z}^d$ o una matriz de tamaño $d \times n$.
Recordamos que con estas identificaciones, tomando coordenadas en la base formada por los vectores propios se tiene que $X_A = \overline{\mathcal{O}\big([1:\cdots:1]\big)} \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Por otro lado, identificaremos los subespacios de $\mathbb{C}^n$ con sus imágenes en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

Observación 1.35. Consideremos los morfismos:

$$\begin{array}{cccc} \Phi_A : (\mathbb{C}^*)^d & \to & (\mathbb{C}^*)^n \\ t & \mapsto & (t^{u_1}, t^{u_2}, \ldots, t^{u_n}) \end{array}$$

y

$$\varphi_A := \pi \circ \Phi_A,$$

siendo $\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ la proyección canónica asociada al espacio proyectivo.

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^*)^d \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[dr, "\varphi_A:=\pi\circ\Phi_A"'] & (\mathbb{C}^*)^n \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t=(t_1,\ldots,t_d) \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[dr, "\varphi_A:=\pi\circ\Phi_A"'] & (t^{u_1},\ldots,t^{u_n}) \arrow[d, "\pi"] \\ & [t^{u_1}:\cdots:t^{u_n}] \end{tikzcd}$$

Entonces $X_A = \overline{\mathcal{O}\big([1:\cdots:1]\big)} = \overline{\varphi_A((\mathbb{C}^*)^d)}$.

Ejemplo 1.36. Consideremos la matriz $A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Como la órbita de $[1:\cdots:1] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ por la acción de $(\mathbb{C}^*)^n$ es $\big\{[t_1:\cdots:t_n] : t_i \in \mathbb{C}^*, i = 1,\ldots,n\big\}$, entonces $X_A = \overline{\mathcal{O}\big([1:\cdots:1]\big)} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$; es decir $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ es una variedad tórica proyectiva.

Los resultados obtenidos en la sección 2 respecto a la acción de T en $\mathbb{P}(V)$ se traducen en términos de la matriz A y de la variedad X_A del siguiente modo:

(1) Se puede suponer que la primera fila de A es $(1,...,1)$.
En efecto, es una consecuencia inmediata del Lema 1.26.

(2) La variedad X_A es un invariante afín de A.
La Proposición 1.34 afirma que agregar o quitar una fila que es combinación lineal entera de las demás filas de la matriz A no modifica a la variedad X_A. Más aún se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.37. *Sea $A = (u_1|\ldots|u_n) \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ y $\Gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ es una transformación afín inyectiva cuya matriz asociada tiene entradas racionales tal que $\Gamma(A) = A' \subset \mathbb{Z}^k$. Entonces $X_A = X_{A'}$.*

Demostración. Es suficiente hacer la demostración en el caso que Γ sea entera, es decir, cuando Γ es de la forma:

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_d) = \left(c_{10} + \sum_{j=1}^{d} c_{1j}x_j, c_{20} + \sum_{j=1}^{d} c_{2j}x_j, \ldots, c_{k0} + \sum_{j=1}^{d} c_{kj}x_j\right).$$

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_d) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1d} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ \vdots \\ c_{k0} \end{pmatrix},$$

con $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1d} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kd} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k\times d}(\mathbb{Z})$ de rango máximo y $c_0 = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ \vdots \\ c_{k0} \end{pmatrix}$.

Entonces, como $\Gamma(u_1) \in \mathbb{Z}^k$, se tiene que:

$$s^{\Gamma(u_1)} = s_1^{c_{10}+c_{11}u_{11}+c_{12}u_{21}+\cdots+c_{1d}u_{d1}} s_2^{c_{20}+c_{21}u_{11}+c_{22}u_{21}+\cdots+c_{2d}u_{d1}} \dots s_k^{c_{k0}+c_{k1}u_{11}+c_{k2}u_{21}+\cdots+c_{kd}u_{d1}}.$$

$$s^{\Gamma(u_1)} = s_1^{c_{10}} \dots s_k^{c_{k0}} s_1^{c_{11}u_{11}+c_{12}u_{21}+\cdots+c_{1d}u_{d1}} \dots s_k^{c_{k1}u_{11}+c_{k2}u_{21}+\cdots+c_{kd}u_{d1}}.$$

Análogamente para $\Gamma(u_2), \dots, \Gamma(u_n)$. Entonces

$$\varphi_{A'}(s) = \left[s^{\Gamma(u_1)} : s^{\Gamma(u_2)} : \cdots : s^{\Gamma(u_n)}\right]$$

Más aún, si $C^1, \dots, C^d$ son las columnas de C, entonces $\varphi_{A'}(s) = \varphi_A(s^{C^1}, \dots, s^{C^d})$. Si se prueba que dado $t = (t_1, \dots, t_d) \in (\mathbb{C}^*)^d$ existe $s \in (\mathbb{C}^*)^k$ tal que $(s^{C^1}, \dots, s^{C^d}) = (t_1, \dots, t_d)$, se concluye que $X_A = X_{A'}$. Como C es de rango máximo, existe $E \in \mathcal{M}_{d\times k}(\mathbb{Q})$ tal que $EC = I_d$. Como D tiene entradas racionales, para cada i, j supongamos que $e_{ij} = p_{ij}/q_{ij}$ con $p_{ij}, q_{ij} \in \mathbb{Z}$. Para cada $h = 1, \dots, d$ definimos $t_h^{e_{ij}}$ como $v_h^{p_{ij}}$ siendo v_h una raíz q_{ij}-ésima de t_h. Consideremos el vector $s = (t^{E^1}, \dots, t^{E^k})$ siendo E^j la j-ésima columna de la matriz E. Entonces $(s^{C^1}, \dots, s^{C^d}) = (t_1, \dots, t_d)$. En efecto como $\sum e_{ik}c_{kj} = \delta_{ij}$ y $s_i = t^{E^i} = t_1^{e_{1i}} \dots t_d^{e_{di}}$ entonces $s^{C^j} = s_1^{c_{1j}} \dots s_d^{c_{dj}} = (t^{E^1})^{c_{1j}} \dots (t^{E^d})^{c_{dj}} = (t_1^{e_{11}} \dots t_d^{e_{d1}})^{c_{1j}} (t_1^{e_{12}} \dots t_d^{e_{d2}})^{c_{2j}} \dots (t_1^{e_{1d}} \dots t_d^{e_{dd}})^{c_{dj}} = t_j$ para todo $j = 1, \dots, d$.

□

Observación 1.38. Este teorema abarca también nuestra primer suposición. Efectivamente si consideramos $\Gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $\Gamma(x_1, \dots, x_d) = (1, x_1, \dots, x_d)$, entonces Γ es afín, inyectiva y lleva conjuntos A de $\mathbb{Z}^d$ en conjuntos $\tilde{A} = \{1\} \times A$ de $\mathbb{Z}^{d+1}$. Luego $X_A = X_{\tilde{A}}$, por lo que se puede suponer que la matriz A tiene como primera fila a $(1, ..., 1)$.

(3) Se puede suponer que el mcd de los menores maximales de A es 1.
La Observación 1.32 permite suponer que la representación de T es fiel. Luego el Lema 1.31 implica que no se pierde generalidad si las columnas de A generan a $\mathbb{Z}^d$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Veamos como se puede verificar esta condición combinatorialmente.

Proposición 1.39. *Sea $A = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, $L_A \subset \mathbb{Z}^d$ el retículo generado por A y $\{v_1, \dots, v_d\}$ una base del mismo, es decir $L_A = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_d$. Entonces $\left|\det(v_1| \dots |v_d)\right| = g$ siendo g el máximo común divisor de los determinantes de los menores maximales de A.*

Demostración. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canónica de $\mathbb{Z}^n$, $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, $\{e_1, \dots, e_d\}$ base canónica de $\mathbb{Z}^d$, $\{v_1, \dots, v_d\}$ base de L_A y consideramos las dos presentaciones de $\mathbb{Z}^d/L_A$:

$$\begin{array}{cccccccc} \varphi : & \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{Z}^d & \to & \mathbb{Z}^d/L_A & \to & 0 \\ & e_i & \mapsto & u_i & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi' : & \mathbb{Z}^d & \stackrel{\phi'}{\to} & \mathbb{Z}^d & \to & \mathbb{Z}^d/L_A & \to & 0 \\ & e_i & \mapsto & v_i & & & & \end{array}$$

Entonces si denotamos por $I_{j\phi}$ al ideal generado por los menores de tamaño j de la matriz asociada a ϕ, se tiene, por el Lema de Fitting [**9**, Corolario-Definición 20.4, página 493] que $I_{d\phi} = I_{d\phi'} \subset \mathbb{Z}$, es decir $\langle g \rangle = \big\langle \det(v_1|\dots|v_d) \big\rangle \subset \mathbb{Z}$, o sea $g = \det(v_1|\dots|v_d)$.

□

PROPOSICIÓN 1.40. *Sea $A = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, $L_A \subset \mathbb{Z}^d$ el retículo generado por A y $\{v_1, \dots, v_d\}$ una base del mismo. Si $g(A)$ es el mcd de los determinantes de los menores maximales de A, entonces $L_A = \mathbb{Z}^d$ si y sólo si $g(A) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $L_A = \mathbb{Z}_d$, entonces existe una matriz $C \in \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{Z})$ tal que $AC = I_d$, siendo I_d la matriz identidad de tamaño $d \times d$. Consideremos todos los posibles subconjuntos $S \subset \{1, \dots, n\}$ con d elementos $\big($observar que existen $\begin{pmatrix} n \\ d \end{pmatrix}$ posibilidades$\big)$. Dado uno de estos conjuntos, definimos $A_S \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{Z})$ cuyas columnas son las columnas de A indexadas en S y $C_S \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{Z})$ cuyas filas son las filas de C indexadas en S. Por la fórmula de Cauchy-Binet, se tiene que

$$\det(I_d) = \det(AC) = \sum_{S\subset\{1,\dots,n\}, |S|=d} \det(A_S)\det(C_S).$$

Como $\det(I_d) = 1$, es claro de la igualdad anterior que g divide a 1 (para cada S, cada $\det(A_S)$ es múltiplo de $g(A)\big)$, es decir $g(A) = 1$.
Supongamos que $g(A) = 1$ y consideremos $L_A = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_d$ el retículo generado por A. Por la Proposición 1.39, sabemos que $\big|\det(v_1|\dots|v_d)\big| = g(A) = 1$, entonces, $\{v_1, \dots, v_d\}$ es otra base del retículo $\mathbb{Z}_d$, es decir $L_A = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_d = \mathbb{Z}^d$.

□

PROPOSICIÓN 1.41. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ de rango máximo. Entonces existe $A' \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ con $g(A') = 1$ y tal que $X_A = X_{A'}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = (u_1|\dots|u_n) \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ con $g(A) \neq 0$ y L_A el retículo generado por A, es decir $L_A = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_d \subset \mathbb{Z}^d$. Para cada $i = 1, \dots, n$ tenemos que $u_i = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij} v_j$. Sea $A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1d} & \cdots & \alpha_{nd} \end{pmatrix} = (\alpha_1|\dots|\alpha_n)$ y sea $\Gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la transformación lineal con matriz asociada $V = (v_1|\dots|v_d)$. Entonces $VA' = A$ ya que para cada $i = 1, \dots, n$, se tiene que $\Gamma(\alpha_i) = u_i$. Entonces se tiene que $\det(V)g(A') = g(A)$ donde $g(A')$ y $g(A)$ denotan el mcd de los menores maximales de A' y de A respectivamente. Por la Proposición 1.39, como $g(A) = \big|\det(v_1|\dots|v_d)\big|$, entonces $g(A') = 1$. El Teorema 1.37 concluye la tesis.

□

EJEMPLO 1.42. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Los vectores de A son $u_1 = (2, 0)$, $u_2 = (0, 2)$ y $u_3 = (3, 3)$. Es fácil ver que $L_A = \big\{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : \ z_1 + z_2 \text{ es par}\big\}$; luego $\mathbb{Z}^2/L_A \cong \mathbb{Z}_2$.

Una posible base de L_A es $\{v_1, v_2\}$ con $v_1 = (2,0)$ y $v_2 = (1,1)$. Entonces:
$u_1 = (2,0) = 1(2,0)+0(1,1) = 1v_1+0v_2$, $u_2 = (0,2) = -(2,0)+2(1,1) = -v_1+2v_2$ y $u_3 = (3,3) = 0v_1 + 3v_2$. Luego la matriz $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $g = 1$ y $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que $\Gamma(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x+y, y)$. Efectivamente, $\Gamma(1,0) = (2,0) = u_1$, $\Gamma(-1,2) = (0,2) = u_2$ y $\Gamma(0,3) = (3,3)$. Luego $X_A = X_{A'}$.

Observación 1.43. La Proposición 1.41 permite establecer una correspondencia uno a uno entre $(\mathbb{C}^*)^d$ y $\mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)$. En efecto, consideremos el morfismo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^d & \to & \mathbb{P}^{n-1} \\ t & \mapsto & [t^{u_1} : \cdots : t^{u_n}]. \end{array}$$

Entonces si $t, s \in (\mathbb{C}^*)^d$ tales que $[t^{u_1} : \cdots : t^{u_n}] = [s^{u_1} : \cdots : s^{u_n}]$, como $L_A = \mathbb{Z}u_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}u_n = \mathbb{Z}^d$, cada vector canónico $e_j \in \mathbb{Z}^d$ se escribe como $e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_j$, con $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Luego, el hecho que $t^{u_p} = s^{u_p}$ para todo $p = 1, \ldots, n$ implica que $t_i = t^{e_i} = s^{e_i} = s_i$ para todo $i = 1, \ldots, d$, es decir $t = s$. Luego X_A contiene un abierto denso, $\mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)$, isomorfo a un toro algebraico, reencontrando el resultado obtenido en la observación 1.33.

El lema siguiente permite, a partir de una condición muy sencilla sobre la matriz A, determinar si la variedad X_A está contenida en algún hiperplano o no. Este resultado se usará en el Teorema 1.45 y en los capítulos posteriores.

Lema 1.44. *Con las notaciones anteriores, entonces $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ tiene columnas repetidas si y solamente si X_A está contenida en algún hiperplano.*

Demostración. Es claro que si A tiene columnas repetidas, la variedad X_A está contenido en algún hiperplano. Supongamos que A no tiene columnas repetidas y que la variedad tórica X_A está contenida en algún hiperplano $H_y = \{x \in \mathbb{P}^{n-1} : x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0\}$ para algún $y \in \mathbb{P}^{n-1}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} t^{u_i} y_i = 0, \forall\, t \in (\mathbb{C}^*)^d,$$

y el polinomio $P_y(t) = \sum_{i=1}^{n} t^{u_i} y_i$ sería el polinomio identicamente nulo; luego $y_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, lo cual lleva a una contradicción. □

En el libro [**14**, Ejemplo 7.1.1, página 151] se prueba que cualquier automorfismo f de $\mathbb{P}^{n-1}$ viene de pasar al cociente un isomorfismo lineal $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

El teorema siguiente muestra que toda variedad tórica proyectiva $X \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ con una inmersión equivariante (es decir, la acción del toro sobre X es la restricción a X de una acción del toro en $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\big)$ puede describirse como una variedad del tipo X_A :

Teorema 1.45 ([**11**], prop 1.5, cap 5.). *Sea $T = (\mathbb{C}^*)^d$ un toro que actúa en $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ y $X \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ una variedad tórica inmersa para la acción inducida por T. Supongamos que la inmersión de X en $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ es una inmersión equivariante. Sea H el mínimo* *subespacio T-estable que contiene a X. Entonces existe un isomorfismo $\varphi : \mathbb{P}^h(\mathbb{C}) \to H, h = \dim H$, y un conjunto $A \subset \mathbb{Z}^d$ tal que X_A sea isomorfa a X. Más aún, H es el menor subespacio que contiene a X.*

Demostración. Sea H el menor subespacio T-estable que contiene a la variedad tórica X, es decir H es la intersección de todos los hiperplanos T-estables que contienen a X. Sea $\{v_0, \ldots, v_h\}$ una base de vectores propios de H para la representación de T y $A = \{u_0, \ldots, u_h\}$ el conjunto de pesos correspondientes; entonces $t \cdot v_i = t^{u_i} v_i$ para todo $i = 0, \ldots, h$. Sea $p \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}(p)} = X$ y denotamos por $[p_0 : \cdots : p_h]$ las coordenadas de p en la base $\{v_0, \ldots, v_h\}$, es decir $p = \sum_{i=0}^{h} p_i v_i$. Por otro lado consideremos $\mathbb{C}^{h+1}$, y luego $\mathbb{P}^h(\mathbb{C})$, con la acción $t \cdot e_i = t^{u_i} e_i$ siendo $\{e_0, \ldots, e_h\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^{h+1}$. Sea $\varphi : \mathbb{P}^h(\mathbb{C}) \to H$, $\varphi(e_i) = p_i v_i$ para todo $i = 0, \ldots h$. Obsérvese que por la minimalidad de H, $p_i \neq 0$ para todo $i = 0, \ldots, h$. Entonces el morfismo φ es T-equivariante pues:

$$\varphi(t \cdot e_i) = \varphi(t^{u_i} e_i) = t^{u_i} \varphi(e_i) = t^{u_i} p_i v_i = p_i\, t^{u_i} v_i = p_i\, t \cdot v_i = t \cdot (p_i v_i) = t \cdot \varphi(e_i)$$

para todo $i = 0, \ldots, h$, y

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{h} e_i\right) = \sum_{i=0}^{h} \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{h} p_i v_i.$$

más aún, φ es inyectiva; luego $\varphi\left(\mathcal{O}\left([1 : \cdots : 1]\right)\right) = \mathcal{O}(p)$ y $\varphi(X_A) = X$.
Observar que A no tiene columnas repetidas, de lo contrario, la variedad X_A estaría contenida en un hiperplano (Lema 1.44) y como φ transforma subespacios en subespacios de la misma dimensión, esto implicaría que $\varphi(X_A) = X$ estaría contenida en un hiperplano de H, T-estable, pues φ es T-equivariante, y H no sería entonces el mínimo hiperplano T-estable que contiene a X. Más aún, por el Lema 1.44, H es el menor subespacio que contiene a X, pues A no tiene columnas repetidas.

□

Veamos a continuación un lema que nos permitirá tratar las variedades X_A que provienen de una matriz A con columnas repetidas, en particular en el último capítulo.

Lema 1.46. *Sean $A = (u_1 | \ldots | u_n) \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$ y $k_1, \ldots, k_n$ enteros positivos tal que $k_i + 1$ es la cantidad de veces que se aparece la columna u_i en la matriz A para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces el mínimo subespacio S que contiene a X_A tiene codimensión $\sum_{i=1}^{n} k_i$.*

Demostración. Supongamos que, intercambiando las columnas de A, $A = (\underbrace{u_1 | \ldots | u_1}_{k_1+1} | \underbrace{u_2 | \ldots | u_2}_{k_2+1} | \ldots | \underbrace{u_h | \ldots | u_h}_{k_h})$ y que una base de vectores propios es $B = \{v_{u_1}^1, \ldots, v_{u_1}^{k_1+1}, v_{u_2}^1, \ldots, v_{u_2}^{k_2+1}, \ldots, v_{u_h}^1, \ldots, v_{u_h}^{k_h+1}\}$, donde $v_{u_i}^l$ denota un vector propio asociado a u_i. A partir de los vectores de B, consideramos los vectores $w_{u_1}^1 = v_{u_1}^1 + \cdots + v_{u_1}^{k_1+1}, \ldots, w_{u_h}^1 = v_{u_n}^1 + \cdots + v_{u_n}^{k_h+1}$; es decir para cada $j = 1, \ldots, h$

el vector $w^1_{u_j}$ es la suma de todos los vectores propios asociados al valor propio u_j de la base B. Completamos el conjunto $\{w^1_{u_1}, \ldots, w^1_{u_h}\}$ hasta llegar a una base B' de $\mathbb{C}^n$. En esta base $\sum v_i$ tiene coordenadas $[1 : 1 : \cdots : 1 : \underbrace{0 : \cdots : 0}_{k_1} : \underbrace{0 : \cdots : 0}_{k_2} : \cdots : \underbrace{0 : \cdots : 0}_{k_h}]$ y entonces en las nuevas coordenadas tenemos que la variedad $X_A = \overline{\left\{[t^{u_1} : \cdots : t^{u_h} : \underbrace{0 : \cdots : 0}_{k_1} : \cdots : \underbrace{0 : \cdots : 0}_{k_h}] :\ t \in (\mathbb{C}^*)^d\right\}}$. De la misma manera que en la demostración del Lema 1.44, al ser los vectores $u_1, \ldots, u_h$ todos distintos, no puede haber relaciones lineales entre las coordenadas no nulas de X_A. Luego el menor subespacio lineal que contiene a la variedad X_A tiene codimensión $k_1 + k_2 + \cdots + k_h = \sum_{i=1}^{n} k_i$. □

Corolario 1.47. *En las hipótesis del lema 1.46, la variedad $X_A \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es isomorfa (como variedad inmersa) a $\left\{[0 : \cdots : 0 : y] :\ [y] \in X_{A'} \subset \mathbb{P}^{h-1}\right\}$ siendo $A' = (u_1| \ldots |u_h) \in \mathcal{M}_{d\times h}(\mathbb{Z})$, la matriz que se obtiene de A eliminando las columnas repetidas.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del lema 1.46. □

Proposición 1.48. *Sea $A = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{Z}^d$; consideremos el ideal*

$$I_A = \left\langle Y^a - Y^b :\ a, b \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i \right\rangle \subset \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n].$$

Entonces $I_A = \mathcal{I}(X_A)$, el ideal homogéneo asociado a X_A, es decir

$$X_A = \left\{x :\ x^a = x^b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{N}^n \text{ tal que } Aa = Ab\right\}.$$

Demostración. Sea $Y_A = \overline{\pi^{-1}(X_A)}$ el cono afín sobre X_A. Entonces:

$$\mathcal{I}(X_A) = \mathcal{I}(Y_A) = \{f \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]\ :\ f|_{Y_A} = 0\} =$$

$$= \{f \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]\ :\ f(t^{u_1}, t^{u_2}, \ldots, t^{u_n}) = 0\ \ \forall\, t \in (\mathbb{C}^*)^d\}.$$

Sea $f(Y) = Y^a - Y^b \in I_A$, con $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i$. Entonces:

$f(t_1^{u_1}, \ldots, t_n^{u_n}) = (t^{u_1})^{a_1}(t^{u_2})^{a_2} \cdots (t^{u_n})^{a_n} - (t^{u_1})^{b_1}(t^{u_2})^{b_2} \cdots (t^{u_n})^{b_n} = t^{\sum a_i u_i} - t^{\sum b_i v_i} = 0.$

Luego $f \in \mathcal{I}(X_A)$.

Veamos la otra inclusión. Sea $f = \sum_{a\in\mathbb{N}^n} c_a Y^a \in \mathcal{I}(X_A)$. Entonces $f(t^{u_1}, \ldots, t^{u_n}) = 0$ para todo $t \in (\mathbb{C}^*)^d$. Reagrupando los monomios, tenemos:

$$0 = f(t^{u_1}, \ldots, t^{u_n}) = \sum_{j=1}^{s} c'_j t^{v_j} \quad \forall\, t \in (\mathbb{C}^*)^d,$$

donde $v_j \in \mathbb{Z}^d$, con $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$, y $c'_j = \sum_{a\,:\,\sum a_i u_i = v_i} c_a$. Luego $c'_j = 0 \ \ \forall\, j = 1, \ldots, s$, por lo que $\sum_{a\,:\,\sum a_i u_i = v_j} c_a Y^a \in \mathcal{I}(X_A) \,\forall\, j = 1, \ldots, s$.

Entonces es suficiente probar la inclusión en el caso que $f(Y) = \sum_{i=1}^{p} d_i Y^{b_i} \in \mathcal{I}(X_A)$ donde los vectores $b_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in}) \in \mathbb{N}^n$ y $\sum b_{rj} u_j = \sum b_{sj} u_j \ \forall\, r, s = 1, \ldots, p$, y $\sum_{i=1}^{p} d_i = 0$. En ese caso,

$$f(Y) = d_1(Y^{b_1} - Y^{b_2}) + (d_1 + d_2)(Y^{b_2} - Y^{b_3}) + \cdots + (d_1 + d_2 + \cdots + d_{p-1})(Y^{b_{p-1}} - Y^{b_p}) \in I_A.$$

□

Observación 1.49. El ideal $I_A = \left\langle Y^a - Y^b :\ a, b \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i \right\rangle$ se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_A &= \left\langle Y^{a^+} - Y^{a^-} \ :\ a \in \mathbb{Z}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0,\ a = a^+ - a^-,\ a^+, a^- \in \mathbb{N}^n \right\rangle \\ &= \left\langle Y^{a^+} - Y^{a^-} \ :\ a \in \mathbb{Z}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0,\ a \in Ker(A) \right\rangle \end{aligned}$$

siendo $a_i^+ = \text{máx}\{a_i, 0\}$ y $a_i^- = -\text{mín}\{a_i, 0\}$ y $a = a^+ - a^- \in Ker(A)$. Una de las inclusiones es obvia. Para la otra alcanza con observar que $Y^a - Y^b =$ $= Y^{\left(\text{mín}\{a_1, b_1\}, \ldots, \text{mín}\{a_n, b_n\}\right)}(Y^\alpha - Y^\beta)$, donde α y β son dos vectores con todas sus coordenadas mayores o iguales a cero y $\alpha - \beta \in Ker(A)$. Entonces

$$X_A = \left\{ x :\ x^{v^+} - x^{v^-} = 0 \,\forall\, v \in Ker(A) \cap \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Definición 1.50. Sea $A \in \mathcal{M}_{d \times n}$. El *núcleo entero* de A, $Ker_{\mathbb{Z}}(A)$, se define como $Ker(A) \cap \mathbb{Z}^n$.

Observación 1.51. Como podemos suponer que $(1, \ldots, 1)$ es una fila de A (Proposición 1.26 y Observación 1.38), la suma de las coordenadas de un vector $v \in Ker(A)$ es nula.

Observación 1.52. Como $Ker(A)$ es un subespacio vectorial, será de utilidad en lo que sigue considerar, en vez de $Ker(A)$, su proyección $\pi\big(Ker(A) \setminus \{0\}\big)$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, que identificaremos con $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)$.

Sea $\mathbb{T}^{n-1}(\mathbb{C})$ el toro de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, es decir

$$\mathbb{T}^{n-1}(\mathbb{C}) = \big\{ [p_1 : \cdots : p_n] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \ :\ p_i \neq 0 \,\forall\, i = 1, \ldots, n \big\}.$$

Los siguientes resultados serán de utilidad en los capítulos posteriores:

Corolario 1.53. *Si $A \in \mathcal{M}_{d \times n}(\mathbb{Z})$ y X_A es la variedad tórica asociada entonces:*

$$X_A \cap \mathbb{T}^{n-1} = \big\{ [x] \in \mathbb{T}^{n-1} :\ x^v = 1,\ \forall\, v \in Ker_{\mathbb{Z}}(A) \big\}.$$

Demostración. La demostración es evidente a partir de la Proposición 1.48 y de la Observación 1.49. $\square$

Definición 1.54. En las notaciones anteriores, sea B una matriz cuyos vectores columnas forman una base del núcleo entero de A; entonces $AB = 0$. Decimos que B es una *matriz dual de Gale* de A. Observar que B no es única.
Como la primera fila de A es el vector $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n$, entonces:
- la suma de las coordenadas de cada vector columna de B es nula (Observación 1.51).
- como cada vector $u_i \in A$ es de la forma $(1, u_i')$, B "expresa las relaciones afines entre los vectores u_i'".

Lema 1.55. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ y $B = (w_1|w_2|\ldots|w_m)$ una matriz dual de Gale de A. Entonces*

$$X_A \cap \mathbb{T}^{n-1} = \big\{[x] \in \mathbb{T}^{n-1} : \, x^{w_1} = x^{w_2} = \cdots = x^{w_m} = 1\big\}.$$

Demostración. Si $x \in X_A \cap \mathbb{T}^{n-1}$ entonces es claro por el corolario 1.53 que $x^{w_j} = 1 \ \forall\ j = 1, \ldots, m$. Recíprocamente, si $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es base de $Ker_{\mathbb{Z}}(A)$ y $x \in \mathbb{T}^{n-1}$ tal que $x^{w_1} = x^{w_2} = \cdots = x^{w_m} = 1$, entonces $x^v = x^{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j} = \prod_{j=1}^{m} (x^{w_j})^{\lambda_j} = 1$. $\square$

Proposición 1.56. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$. Entonces*

$$X_A \cap \mathbb{T}^{n-1} = \overline{\mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)} \cap \mathbb{T}^{n-1} = \mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big).$$

Demostración. El morfismo $\Phi_A : (\mathbb{C}^*)^d \to (\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ definido por $\Phi_A(t) = (t^{u_1}, \ldots, t^{u_n})$ es un morfismo de grupos algebraicos y, como tal, $\Phi_A\big((\mathbb{C}^*)^d\big)$ es cerrado en $(\mathbb{C}^*)^n$. Retomando la notación utilizada en los diagramas de la Observación 1.35, si $\varphi_A = \pi \circ \Phi_A : (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{P}^{n-1}$ entonces si $[x] \in \overline{\varphi_A\big((\mathbb{C}^*)^d\big)} \cap \mathbb{T}^{n-1}$, se tiene que $x \in \overline{\Phi_A\big((\mathbb{C}^*)^d\big)} \cap (\mathbb{C}^*)^n = \Phi_A\big((\mathbb{C}^*)^d\big)$. En efecto, como $(1, \ldots, 1)$ es la primera fila de la matriz A se tiene que $\pi\big(\overline{\Phi_A(\mathbb{C}^*)^d}\big) = \overline{\pi\big(\Phi_A(\mathbb{C}^*)^d\big)}$ ya que $\overline{\Phi_A(\mathbb{C}^*)^d}$ es un cono. Luego se concluye que $[x] \in \mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)$. $\square$

Definición 1.57. Si $p = [p_1 : \cdots : p_n] \in \mathbb{T}^{n-1}$ y $x = [x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, consideramos la acción natural de $\mathbb{T}^{n-1}$ en $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ dada por:

$$p * x = [p_1x_1 : \cdots : p_nx_n].$$

Observar que en este caso $x \mapsto p*x$ es un automorfismo de $\mathbb{P}^{n-1}$ y que esta construcción solamente tiene sentido cuando $p \in \mathbb{T}^{n-1}$.

Observación 1.58. Consideremos la variedad X_A y sea $p \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Entonces

$$p * X_A = p * \overline{\mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)} = \overline{\mathcal{O}\big(p * [1 : \cdots : 1]\big)} = \overline{\mathcal{O}(p)}$$

es una variedad algebraica. Basémosnos en la condición del ideal de $\mathcal{I}(X_A)$ obtenida en la Observación 1.49 para describir a su vez $\mathcal{I}(p * X_A)$.

Sea $x \in p * X_A$. Entonces $x = p * y$ para algún $y \in X_A$. Entonces $p^{-1} * x = y$. Como y verifica que $y^a - y^b = 0$, para todo $a, b \in \mathbb{N}^m$ tales que $\sum a_i u_i = \sum b_i u_i$, se cumple que:

$$(p^{-1} * x)^a - (p^{-1} * x)^b = 0$$

si y sólo si

$$p^b * x^a - p^a * x^b = 0.$$

Luego, el ideal de $p * X_A$ es:

$$\mathcal{I}(p * X_A) = \left\langle p^b * Y^a - p^a * Y^b : \ a, b \in \mathbb{N}^n, \sum_{i=1}^n a_i u_i = \sum_{i=1}^n b_i u_i \right\rangle =$$

$$= \left\langle p^{a^-} * Y^{a^+} - p^{a^+} * Y^{a^-} \ : \ a \in \mathbb{Z}^n, \sum_{i=1}^n a_i u_i = 0, \ a \in Ker(A), \right\rangle$$

siendo $a_i^+ = max\{a_i, 0\}$ y $a_i^- = -min\{a_i, 0\}$ y $a = a^+ - a^- \in Ker(A)$.

Corolario 1.59. *Sea $p \in \mathbb{T}^{n-1}$. Entonces:*

$$p * X_A \cap \mathbb{T}^{n-1} = \left\{ [x] \in \mathbb{T}^{n-1} : \ x^v = p^v \ \forall \ v \in Ker_{\mathbb{Z}}(A) \right\}.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la observación anterior y del Corolario 1.53. □

4. Variedades tóricas proyectivas lisas

Concluímos este capítulo con algunas nociones que permiten estudiar la lisitud de las variedades tóricas proyectivas del tipo X_A, con el mismo enfoque que [**11**]. Si bien, no probaremos el teorema que enunciamos, ejemplificaremos el mismo. Las definiciones relativas a los conos (semigrupo, retículo, cara, etc) se pueden encontrar en [**11**].

Consideramos el retículo $\mathbb{Z}^d$, inmerso en $\mathbb{Z}^{d+1}$, identificándolo con el hiperplano $H = \{(a_1, \ldots, a_d, 1) : a_i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^{d+1}$. Entonces si $A \subset \mathbb{Z}^d$, definimos el conjunto $\tilde{A} = A \times \{1\} \subset H$. Sean S el semigrupo en $\mathbb{Z}^{d+1}$ generado por $\tilde{A}$ y 0 y $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ la envolvente convexa de S; es decir K es el cono de vértice 0 y de base Q, siendo Q la envolvente convexa de A.

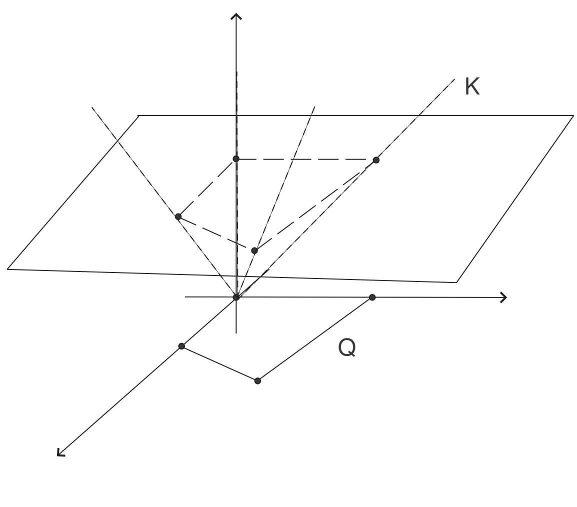

Figura 1

Para cada cara F de Q, sea $\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(F) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ el subespacio generado por los vectores de F; entonces $\dim \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(F) = \dim F + 1$. Definimos el retículo

$$\mathbb{Z}^{d+1}/F := \mathbb{Z}^{d+1}/\big(\mathbb{Z}^{d+1} \cap \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(F)\big)$$

La imagen del semigrupo S en el nuevo retículo $\mathbb{Z}^{d+1}/F$ se denota por S/F.
Por $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}(F)$ y por $\mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(F)$ notaremos al subreticulo afín de $\mathbb{Z}^d$ y al subespacio afín de $\mathbb{R}^d$ generado por la cara F.
Con las notaciones anteriores, se tiene el teorema siguiente:

Teorema 1.60. *Sea $A \subset \mathbb{Z}^d$ que genera $\mathbb{Z}^d$ como retículo afín y sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ la envolvente convexa de A. Entonces la variedad X_A es lisa si y sólo si para toda cara no vacía $F \subset Q$ se tiene que:*
(a) El semigrupo S/F es isomorfo a $\mathbb{Z}_+^m$, siendo $m = \dim(Q) - \dim(F)$;
(b) Los retículos $\mathbb{Z}^d \cap \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(F)$ y $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}(A \cap F)$ coinciden.

Demostración. Ver [**11**], corolario 3.2, capítulo 5. $\square$

Observemos que la condición (b) significa que los puntos enteros que se encuentran en el espacio afín real generado por F, deben coincidir con los puntos enteros en el espacio afín generado por la intersección de A con F.

Apliquemos el teorema anterior en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.61. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$.
Entonces A genera a $\mathbb{Z}^2$ como retículo.

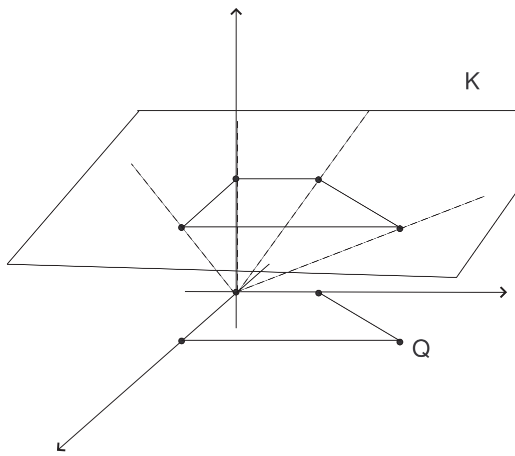

Figura 2

La envolvente convexa de A es el polítopo cuyo vértices son $(0,0), (1,0), (0,1)$ y $(1,2)$. Consideremos la cara correspondiente al segmento $\Gamma = [(1,0),(1,2)]$. Entonces el conjunto $\mathbb{Z}^2 \cap \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ coincide con el de todos los puntos enteros que se encuentran sobre la recta determinada por los puntos $(1,0)$ y $(1,2)$. Por otro lado $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}(A \cap \Gamma) = \mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}\big((1,0),(1,2)\big)$. Estos dos retículos no son iguales, ya que $(1,1) \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, pero no pertenece a $\mathrm{Aff}_{\mathbb{Z}}\big((1,0),(1,2)\big)$, con lo cual la condición (b) del Teorema 1.60 no se cumple y por lo tanto X_A no es lisa.

Ejemplo 1.62. Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $X_{A_1} = \big\{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] : x_1x_4 - x_3^2 = 0\big\}$ y no es lisa ya que $[0:1:0:0]$ es un punto singular. Veamos como reencontrar este hecho con el Teorema 1.60.

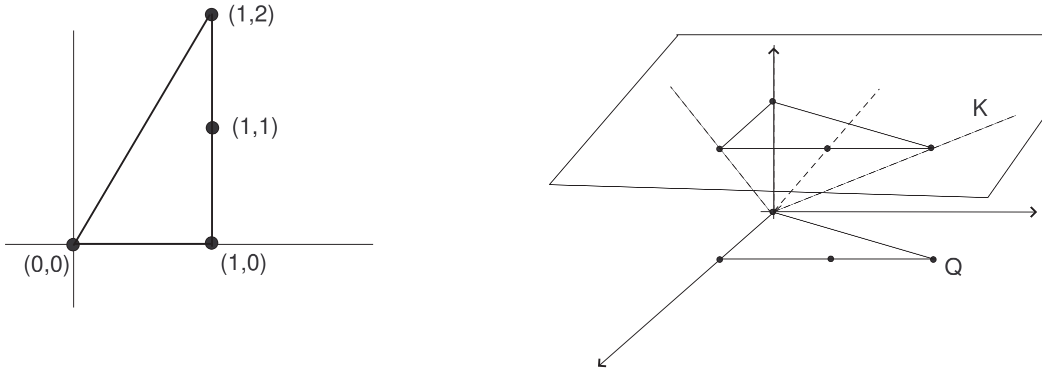

Figura 3

Observar que para cada cara, la condición (b) del Teorema 1.60 se verifica.
Sea F la cara correspondiente al vértice $(0,0)$. Entonces $\mathbb{Z}^3/F = \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}(1,0,0)$ quién es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. El semigrupo $S/F = \mathbb{Z}_{\geq 0}(1,0) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(1,1) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(1,2)$ no es libre, es decir, no es isomorfo a $\mathbb{Z}_+^2$, luego X_A no es lisa.

Capítulo 2

Variedad dual de una variedad tórica del tipo X_A

En este capítulo presentamos la noción de variedad dual de una variedad tórica proyectiva del tipo X_A así como la pregunta central de este trabajo: ¿cuándo existe un automorfismo f de $\mathbb{P}^{n-1}$ que hace que X_A y su variedad dual sean isomorfas? En este caso decimos que la variedad X_A es *autodual*. La sección 1 trata brevemente sobre generalidades de la variedad dual de una variedad proyectiva. En particular, el Teorema 2.4 muestra que si X es irreducible entonces su variedad dual también lo es. En la sección 2 nos ocupamos de estudiar con detalles la variedad dual X_A^* de X_A. En toda esta sección, asumiremos las reducciones hechas en el capítulo anterior, es decir A se identifica con una matriz $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$, de rango máximo, cuyas columnas generan a $\mathbb{Z}^d$ como $\mathbb{Z}$-módulo, y que $(1,\ldots,1)$ es la primera fila de A. En particular probamos el Teorema 2.11, extraído de [**4**], que provee una manera explícita de calcular X_A^*. Finalmente concluimos este capítulo sobre un tipo particular de matrices, llamadas piramidales, y estudiamos sus consecuencias sobre X_A^*. A lo largo del capítulo presentaremos varios ejemplos que, además de ilustrar las ideas desarrolladas, retomaremos en el capítulo siguiente.

1. Variedad dual de una variedad proyectiva

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathbb{P}(V)$ el espacio proyectivo asociado, definimos el espacio proyectivo dual como $\mathbb{P}(V^*)$.
Si $V = \mathbb{C}^n$, notamos $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ y $\mathbb{P}^{n-1*} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})^* = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n*})$. Si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$ y $\{e_1^*,\ldots,e_n^*\}$ la base dual asociada en $(\mathbb{C}^n)^*$ identificaremos $\mathbb{P}^{n-1}$ con $(\mathbb{P}^{n-1})^*$ por medio del isomorfismo:

$$\begin{array}{rcc} \eta : \mathbb{P}^{n-1} & \to & \mathbb{P}^{n-1*} \\ \left[\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right] & \mapsto & \left[\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i^*\right] \end{array}.$$

Por otro lado, a cada punto $[\xi] \in \mathbb{P}(V^*)$ se le asocia el hiperplano $H_{[\xi]}$ en $\mathbb{P}(V)$ definido por

$$H_{[\xi]} = \{x \in \mathbb{P}(V) \ : \ \xi(x) = 0\},$$

es decir, en el caso que $V = \mathbb{C}^n$, al punto $\xi = [\xi_1 : \cdots : \xi_n]$ se le asocia el hiperplano $H_\xi = \left\{[x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^{n-1} \ : \ \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i = 0\right\}$; geométricamente esto corresponde en asociarle a cada hiperplano su normal.

Definición 2.1. Sea $X \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ una variedad algebraica proyectiva. La *variedad dual* de X es el conjunto:

$$X^* = \overline{\{\xi \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})^* \,:\, \exists\, p \in H_\xi \cap X \text{ regular tal que } TX_p \subset H_\xi\}} \subset \big(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})\big)^*,$$

es decir X^* es la clausura de todos los hiperplanos tangentes a X.

Genéricamente, la dimensión de la variedad dual es $n-2$ ([**11**], capítulo 1), es decir es una hipersuperficie en $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

Ejemplos 2.2. (1) Supongamos que $X = \{p\}$, $p \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Entonces $X^* = H_p \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})^*$.
(2) Si $X = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ entonces $X^* = \emptyset$.
(3) En el transcurso del capítulo calcularemos varios ejemplos de variedades duales asociados a variedades tóricas proyectivas.

Definición 2.3. Si la dimensión de X^* es menor que $n-2$, decimos que X es *defectiva* y llamamos *defecto* de X al número entero $\mathrm{def}(X) = n-2-\dim X^*$.

Proposición 2.4. *Si $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es una variedad algebraica proyectiva irreducible entonces X^* es irreducible.*

Demostración. La demostración siguiente es extraída de [**11**], Proposición 1.3 página 15. Consideremos X_{reg} el conjunto de los puntos regulares de X; X_{reg} es abierto no vacío en X y como X es irreducible se tiene que $\overline{X_{reg}} = X$.
Sea $W_0 = \big\{(x,H) : \ x \in X_{reg} \text{ y } H \text{ es un hiperplano tangente a } X \text{ en } x\big\} \subset \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$ y $W = \overline{W_0}$. Por otro lado sean pr_1 y pr_2 las proyecciones de $\mathbb{P}^{n-1} \times (\mathbb{P}^{n-1})^*$ sobre $\mathbb{P}^{n-1}$ y sobre $(\mathbb{P}^{n-1})^*$ respectivamente. Como $\mathbb{P}^{n-1}$ es completo, ver [**15**], página 46, pr_2 es un morfismo cerrado y luego $pr_2(W) = X^*$. Para probar que X^* es irreducible alcanza entonces con probar que W es irreducible, ya que la imagen de un irreducible por un morfismo de variedades algebraicas es irreducible.
Para probar que W es irreducible, mostraremos que W_0 es irreducible. El morfismo $pr_1 : W_0 \to X_{reg}$ es un fibrado con fibras proyectivas, luego para todo punto $x \in X_{reg}$ existe un abierto $U \subset X_{reg}$ tal que $pr_1^{-1}(U) \subset W_0$ es homeomorfo a $U \times \mathbb{P}^{n-1}$.
Consideremos la unión de estos abiertos; entonces $W_0 = pr_1^{-1}\big(\bigcup_i U_i\big) = \bigcup_i pr_1^{-1}(U_i)$ donde $pr_1^{-1}(U_i) \simeq \mathbb{P}^{n-1} \times U_i$. Como X_{reg} es irreducible entonces W_0 es irreducible, luego se deduce la tesis.

□

Observación 2.5. La demostración anterior muestra en particular que en la construcción de la variedad dual podríamos haber tomado cualquier subconjunto abierto $V \subset X_{reg}$ - luego denso - tal cual lo haremos en la demostración del Teorema 2.11.

El teorema siguiente, que no probaremos, justifica, de alguna manera, por qué X^* se llama variedad dual de X y lleva el nombre de "Teorema de Bidualidad".

Teorema 2.6. *Si $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es una variedad proyectiva entonces $(X^*)^* = X$.*

Demostración. Ver [**11**], capítulo 1, Teorema 1.1. □

Terminamos esta sección definiendo la noción de autodualidad de una variedad, de la cual se tratará en el resto de este trabajo. Recordamos que todo automorfismo f de $\mathbb{P}^{n-1}$ viene inducido por un operador lineal de $\mathbb{C}^n$.

Definición 2.7. Una variedad $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es *autodual* si existe un automorfismo $f : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $f(X) = X^*$.

Observación 2.8. Si $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es una variedad proyectiva y $f : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ es un automorfismo, entonces X es autodual si y sólo si $f(X)$ lo es. Más aún $f(X^*) = f(X)^*$.

Será objetivo de esta monografía caracterizar las variedades tóricas del tipo X_A que son autoduales.

2. Variedad dual de una variedad tórica proyectiva

En esta sección nos interesaremos por la variedad dual de una variedad tórica proyectiva $X_A \subset \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ asociada a un conjunto de pesos $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ que se identifica con una matriz $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ con las suposiciones hechas al comienzo de este capítulo.
Sea $B \in \mathcal{M}_{n\times(n-d)}(\mathbb{Z})$ una matriz dual de Gale de A, cuyas filas y columnas denotamos por $v_1, \dots, v_n$ y $w_1, \dots, w_{n-d}$ respectivamente, es decir

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (w_1 | \dots | w_{n-d})\,. \tag{2.1}$$

Observación 2.9. En la notación anterior, el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{C}^{n-d} & \to & \mathbb{C}^n \\ s & \mapsto & \big(\langle s, v_1\rangle, \langle s, v_2\rangle, \dots, \langle s, v_n\rangle\big) = \sum\limits_{i=1}^{n-d} s_i w_i \end{array}$$

es una parametrización de $Ker(A)$.

Ejemplo 2.10. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Entonces $\mathcal{B} = \big\{(1,-2,1,0),(0,1,-2,1)\big\}$ es una base de $Ker_{\mathbb{Z}}(A)$ y una matriz dual de Gale de A es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 2}$. Si $s = (s_1, s_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$, entonces la parametrización es:

$$\gamma(s_1, s_2) = \big(\langle (s_1,s_2),(1,0)\rangle, \langle (s_1,s_2),(-2,1)\rangle, \langle (s_1,s_2),(1,-2)\rangle, \langle (s_1,s_2),(0,1)\rangle\big)$$

$$\gamma(s_1, s_2) = (s_1, -2s_1 + s_2, s_1 - 2s_2, s_2).$$

El teorema siguiente $\big($[**4**]$\big)$ permite encontrar una parametrización sencilla de la variedad X_A^* que será útil considerar en lo que sigue.

Teorema 2.11. [**4**]

Sea $A = \{u_1, \ldots, u_n\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{d1} & u_{d2} & \cdots & u_{dn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$.

El morfismo $\beta_A : \mathbb{C}^{n-d} \times (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{P}^{n-1}$ *definido por*

$$\beta_A(s,t) = \big[\langle s, v_1\rangle t^{-u_1} : \langle s, v_2\rangle t^{-u_2} : \cdots : \langle s, v_n\rangle t^{-u_n}\big]$$

es una parametrización racional de la variedad X_A^**, es decir* $\overline{Im(\beta_A)} = X_A^*$.
Más aún:

$$X_A^* = \overline{\bigcup_{p\in\mathbb{P}\left(Ker(A)\right)} \mathcal{O}\big(p\big)},$$

donde $\mathcal{O}\big(p\big)$ *es la órbita de* $p \in \mathbb{P}^{n-1}$ *por la acción de* $(\mathbb{C}^*)^d$ *en* $\mathbb{P}^{n-1}$*.*
En particular $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset X_A^*$*.*

Demostración. La demostración siguiente es extraída de [**4**]. Recordamos que $X_A = \overline{\mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)} = \overline{Im(\varphi_A)}$, donde $\varphi_A(t) : (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{P}^{n-1}$ es la parametrización de X_A definida por $\varphi_A(t) = [t^{u_1} : \cdots : t^{u_n}]$. Tenemos que $Im(\varphi_A)$ es un abierto en X_A, formado por puntos regulares. Luego, por la Observación 2.5,

$$X_A^* = \overline{\{\xi \in (\mathbb{P}^{n-1})^* \ : \ \exists t \in (\mathbb{C}^*)^d \text{ tal que } \varphi_A(t) \in H_\xi \text{ y } TX_A(\varphi_A(t)) \subset H_\xi\}}.$$

Si $x \in Im(\varphi_A)$ entonces $x = \varphi_A(t)$ es regular y

$$TX_A(x) = \left\langle \frac{\partial\varphi_A}{\partial t_1}(t), \frac{\partial\varphi_A}{\partial t_2}(t), \ldots, \frac{\partial\varphi_A}{\partial t_d}(t) \right\rangle =$$

$$= \big\langle (u_{11}t^{u_1} : \cdots : u_{1n}t^{u_n}), (u_{21}t^{u_1} : \cdots : u_{2n}t^{u_n}), \ldots, (u_{d1}t^{u_1} : \cdots : u_{dn}t^{u_n})\big\rangle =$$
$$= \big\langle (t^{u_1} : \cdots : t^{u_n}), (u_{21}t^{u_1} : \cdots : u_{2n}t^{u_n}), \ldots, (u_{d1}t^{u_1} : \cdots : u_{dn}t^{u_n})\big\rangle.$$

La condición $TX_A(\varphi_A(t)) \in H_\xi$ se traduce en:

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} t^{u_1}\xi_1 + t^{u_2}\xi_2 + \cdots + t^{u_n}\xi_n = 0 \\ u_{21}t^{u_1}\xi_1 + u_{22}t^{u_2}\xi_2 + \cdots + u_{2n}t^{u_n}\xi_n = 0 \\ \vdots \\ u_{d1}t^{u_1}\xi_1 + u_{d2}t^{u_2}\xi_2 + \cdots + u_{dn}t^{u_n}\xi_n = 0 \end{cases}$$

Siendo $t^{u_1}\xi_1 + t^{u_2}\xi_2 + \ldots + t^{u_n}\xi_n = 0$ la primera ecuación del sistema (2.2), entonces la condición $TX_A\big(\varphi_A(t)\big) \in H_\xi$ implica que $\varphi_A(t) \in H_\xi$. Por otro lado, el sistema (2.2) es equivalente a $t\cdot\xi \in Ker(A)$ por definición de la acción. Entonces:

$$X_A^* = \overline{\big\{\xi \in (\mathbb{P}^{n-1})^* \ : \ \exists t \in (\mathbb{C}^*)^d \text{ tal que } t\cdot\xi \in Ker(A)\big\}}.$$

Por otro lado, sustituyendo por la parametrización de $Ker(A)$ dada por la Observación 2.9, obtenemos que para todo $i = 1, \ldots, n$:

$$t^{u_i}\xi_i = \langle s, v_i\rangle \text{ para algún } s \in \mathbb{C}^{n-d} \setminus \{0\}.$$

Entonces:

$$X_A^* = \overline{\{\xi \in (\mathbb{P}^{n-1})^* / \, \exists\, t \in (\mathbb{C}^*)^d, \ s \in \mathbb{C}^{n-d} \setminus \{0\} \ : \ t^{u_i}\xi_i = \langle s, v_i \rangle \ \forall\, i = 1, \ldots, n\}}$$

$$= \overline{\{\xi \in (\mathbb{P}^{n-1})^* / \, \exists\, t \in (\mathbb{C}^*)^d, \ s \in \mathbb{C}^{n-d} \setminus \{0\} \ : \ \xi_i = t^{-u_i}\langle s, v_i \rangle \ \forall\, i = 1, \ldots, n\}}.$$

Lo anterior permite afirmar que X_A^* es la clausura de la unión de órbitas de los puntos de $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)$ bajo la acción del toro. Es decir:

$$X_A^* = \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{P}\left(Ker(A)\right)} \mathcal{O}\big(p\big)}.$$

Finalmente, como $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset \bigcup_{p \in \mathbb{P}\left(Ker(A)\right)} \mathcal{O}\big(p\big)$, se deduce en particular que $X_A^* \supset \mathbb{P}\big(Ker(A)\big)$. $\square$

Observación 2.12.

1. Como $(1, \ldots, 1)$ es una fila de A, cada vector $u_i \in \mathbb{Z}^d$ es de la forma $u_i = \begin{pmatrix} 1 \\ u_i' \end{pmatrix}$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$. En consecuencia podemos sustituir en el dominio de la parametrización $(\mathbb{C}^*)^d$ por $(\mathbb{C}^*)^{d-1}$.
2. Al estar recorriendo todos los puntos del toro podemos sustituir en la expresión de la parametrización cada vector $-u_i$ por u_i.
3. El sistema (2.2) permite de hecho definir un morfismo

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\beta_A} : \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \times (\mathbb{C}^*)^{d-1} & \to & \mathbb{P}^{n-1} \\ \big([y],\, t_2, \ldots, t_d\big) & \mapsto & \big[y_1 t_2^{u_{21}} \ldots t_d^{u_{d1}} : \cdots : y_n t_2^{u_{2n}} \ldots t_d^{u_{dn}}\big] \end{array}.$$

4. Las formas lineales $\langle s, v_i \rangle$ son homogéneas y el codominio es un espacio proyectivo, por lo cual el morfismo $\beta_A : \mathbb{C}^{n-d} \times (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{P}^{n-1}$, $\beta_A(s,t) = \big[\langle s, v_1 \rangle t^{-u_1} : \langle s, v_2 \rangle t^{-u_2} : \cdots : \langle s, v_n \rangle t^{-u_n}\big]$ induce otro morfismo:

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\tilde{\beta}}_A : \mathbb{P}^{n-d-1} \times (\mathbb{C}^*)^{d-1} & \to & \mathbb{P}^{n-1} \\ \big([s], t_2, \ldots, t_d\big) & \mapsto & \big[\langle s, v_1 \rangle\, t_2^{u_{21}} \ldots t_d^{u_{d1}} : \cdots : \langle s, v_n \rangle\, t_2^{u_{2n}} \ldots t_d^{u_{dn}}\big] \end{array}.$$

   Para simplificar la notación, nos referiremos a estos tres morfismos como β_A.
5. Por lo anterior se deduce que que la dimensión de la variedad X_A^* es menor o igual que $(n - d - 1) + (d - 1) = n - 2$.

Ejemplo 2.13. Sea $X = \overline{\{[1 : t : t^2] : \ t \in \mathbb{C}^*\}} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \ : \ x_1^2 - x_0x_2 = 0\}$. Entonces $X = X_A$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Por las hipótesis antes mencionada podemos suponer que la matriz A es igual a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Sea matriz $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un dual de Gale para A. Una parametrización de X_A^* está dada por:

$$\beta_A(s,t) = \left[st_1 : -2st_1t_2 : st_1t_2^2\right] = \left[1 : -2t_2 : t_2^2\right].$$

Es decir $X_A^* = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \ : \ x_1^2 - 4x_0x_2 = 0\} = \overline{\mathcal{O}\big([1:-2:1]\big)}$. Observemos además que $X_A^* = \overline{\mathcal{O}\big([1:-2:1]\big)} = [1:-2:1] * \overline{\mathcal{O}\big([1:1:1]\big)} = [1:-2:1] * X_A$.
Si consideramos $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ definido por $f\big([x_0 : x_1 : x_2]\big) = [x_0 : -2x_1 : x_2]$ entonces $f(X_A) = X_A^*$, lo cual concluye que X_A es autodual.

Ejemplo 2.14. Sea $S : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ la inmersión de Segre, definida por la expresión:

$$S\big([x_0 : x_1], [y_0 : y_1 : y_2]\big) = \big[x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : x_1y_2\big].$$

Si $u_1 = (1,0,1,0,0), u_2 = (1,0,0,1,0), u_3 = (1,0,0,0,1), u_4 = (0,1,1,0,0), u_5 = (0,1,0,1,0), u_6 = (0,1,0,0,1)$, entonces si $A = \{u_1, \ldots, u_5\}$ se tiene que

$$\varphi_A(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = S\big([x_0 : x_1], [y_0 : y_1 : y_2]\big).$$

Por lo tanto $Im(S) = X_A = \overline{Im(\varphi_A)}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz A tiene rango 4 (la suma de las dos primera filas es igual a la suma de las tres últimas) con lo que podemos eliminar una fila de A, por ejemplo la segunda, obteniendo de esta manera la matriz $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $X_A = X_{A'}$. Entonces $\dim X_A = 3$.

Sea $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ una matriz dual de Gale para A. Por el Teorema 2.11 una parametrización racional de X_A^* es:

$$\beta_A(s,t) = \big[(-s_1 - s_2)t_1t_2 : s_1t_1t_3 : s_2t_1t_4 : (s_1+s_2)t_2 : -s_1t_3 : -s_2t_4\big].$$

Observemos además que podemos afirmar que la inmersión de Segre es lisa, ya que $Im(S) = X_{\widehat{A}}$, con $\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y claramente verifica las hipótesis del teorema 1.60.

A continuación presentamos a partir de la demostración del Teorema 2.11 una manera más efectiva de calcular la variedad X_A^*.

Proposición 2.15. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ y X_A la variedad tórica proyectiva asociada. Para cada $\xi = [\xi_1 : \cdots : \xi_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$ consideremos el polinomio $f_A(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i t^{u_i}$, donde $u_1, \ldots, u_n$ son los vectores columnas de A. Entonces:*

$$X_A^* = \overline{\left\{\xi \in (\mathbb{P}^{n-1})^* : \ \exists\, t \in (\mathbb{C}^*)^d \ tal\ que\ f_A(t) = \frac{\partial f_A}{\partial t_1}(t) = \frac{\partial f_A}{\partial t_2}(t) = \cdots = \frac{\partial f_A}{\partial t_d}(t) = 0\right\}}.$$

Demostración. En la demostración del Teorema 2.11 vimos que la compatibilidad del sistema (2.2) se reduce a probar que $t \cdot \xi \in Ker(A)$. Pero cada ecuación de (2.2) se puede reescribir como:

$$\left\{\begin{array}{c} \big\langle \xi, \varphi_A(t)\big\rangle = 0 \\ \big\langle \xi, t_1\frac{\partial \varphi_A}{\partial t_1}(t)\big\rangle = 0 \\ \vdots \\ \big\langle \xi, t_d\frac{\partial \varphi_A}{\partial t_d}(t)\big\rangle = 0 \end{array}\right. \tag{2.3}$$

donde φ_A denota la parametrización de X_A. Por otro lado observemos que $f_A(t) = \big\langle \xi, \varphi_A(t)\big\rangle$ y que $\big\langle \xi, t_i\frac{\partial \varphi_A}{\partial t_i}(t)\big\rangle = t_i\frac{\partial f_A}{\partial t_i}(t)$ para todo $i = 1, \ldots, d$. Como $t_i \in \mathbb{C}^*$ se tiene que $t_i\frac{\partial f_A}{\partial t_i}(t) = 0$ si y sólo si $\frac{\partial f_A}{\partial t_i}(t) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, d$. Entonces el sistema (2.3) equivale a $f_A(t) = \frac{\partial f_A}{\partial t_1}(t) = \frac{\partial f_A}{\partial t_2}(t) = \cdots = \frac{\partial f_A}{\partial t_d}(t) = 0$. Se concluye la tesis. □

Observación 2.16. Esta manera de escribir la variedad X_A^* tiene la ventaja de no tener que calcular explícitamente el núcleo de A.

Ejemplos 2.17. (1) Volvamos a probar que la variedad dual asociada a un punto es un hiperplano. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $X_A = \overline{\big\{[t : t : t],\ t \in \mathbb{C}^*\big\}} = \big\{[1 : 1 : 1]\big\}$. Sea $f_A(t) = \xi_1 t + \xi_2 t + \xi_3 t = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)t$. Entonces $f_A = \frac{\partial f_A}{\partial t} = 0$ si y sólo si $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$, es decir $X_A^* = \big\{[\xi_1 : \xi_2 : \xi_3] :\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\big\}$.

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $X_A = \overline{\big\{[t : t : s : s] : t, s \in \mathbb{C}^*\big\}}$, es decir $X_A = \big\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3 : x_0 - x_1 = x_2 - x_3 = 0\big\}$ y $\dim X_A = 1$. Sea $f_A(t, s) = \xi_1 t + \xi_2 t + \xi_3 s + \xi_4 s = (\xi_1 + \xi_2)t + (\xi_3 + \xi_4)s$. Entonces $f_A = \frac{\partial f_A}{\partial t} = \frac{\partial f_A}{\partial s} = 0$ si y sólo si $\xi_1 + \xi_2 = \xi_3 + \xi_4 = 0$, es decir $X_A^* = \big\{[\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4] :\ \xi_1 + \xi_2 = \xi_3 + \xi_4 = 0\big\}$. Observar que en este ejemplo ambas variedades X_A y X_A^* son lisas ya que son superficies lineales y que X_A es autodual. En efecto, con nuestra identificación, si $p = [1 : -1 : 1 : -1]$, y consideramos el automorfismo $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ dado por $f(x) = p * x$ entonces $f(X_A) = X_A^*$.

(3) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $X_A = \overline{\big\{[t : t : t : s : s] : t, s \in \mathbb{C}^*\big\}}$, es decir $X_A = \big\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3 : x_0 - x_1 = x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = 0\big\}$ y $\dim X_A = 1$. Sea $f_A(t, s) = \xi_1 t + \xi_2 t \xi_3 t + \xi_4 s + \xi_5 s = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)t + (\xi_4 + \xi_5)s$. Entonces $f_A = \frac{\partial f_A}{\partial t} = \frac{\partial f_A}{\partial s} = 0$ si y sólo si $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \xi_4 + \xi_5 = 0$, es decir $X_A^* = \big\{[\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 : \xi_5] :\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \xi_4 + \xi_5 = 0\big\}$ y $\dim X_A^* = 2$. Observar que en este

ejemplo ambas variedades X_A y X_A^* son lisas ya que son superficies lineales y que X_A no puede ser autodual ya que las dimensiones de X_A y de X_A^* son distintas.

Ejemplo 2.18. Retomemos el Ejemplo 2.13. Como $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $f_A(t,s) = \xi_0 t + \xi_1 ts + \xi_2 ts^2 = (\xi_0 + \xi_1 s + \xi_2 s^2)t$. Luego el sistema a considerar es

$$\begin{cases} f_A = (\xi_0 + \xi_1 s + \xi_2 s^2)t = 0 \\ \frac{\partial f_A}{\partial t} = \xi_0 + \xi_1 s + \xi_2 s^2 = 0 \\ \frac{\partial f_A}{\partial s} = \xi_1 t + 2\xi_2 ts = 0 \end{cases}$$

Observar que como $t \in \mathbb{C}^*$, $f_A = 0$ si y sólo si $\frac{\partial f_A}{\partial t} = 0$ lo cual pasa si y sólo si $\xi_1^2 - 4\xi_0\xi_2 = 0$ dada la anulación de la derivada. Reencontramos efectivamente que la ecuación de $X_A^* = \{[\xi_0 : \xi_1 : \xi_2] : \ \xi_1^2 - 4\xi_0\xi_2 = 0\}$.

Definición 2.19. Sean $X \subset \mathbb{P}^{h_1}$ e $Y \subset \mathbb{P}^{h_2}$ dos variedades proyectivas. Definimos el *join* de X y de Y como el conjunto

$$J(X,Y) = \overline{\{[x:y] : \ [x] \in X, [y] \in Y\}} \subset \mathbb{P}^{h_1+h_2+1}.$$

Si $Y \subset \mathbb{P}^h$ y definimos $[\underbrace{0:\cdots:0}_{k}] \times Y = \{[\underbrace{0:\cdots:0}_{k} : y] \in \mathbb{P}^{k+h-1}, \ [y] \in Y\} \subset \mathbb{P}^{k+h-1}$, tomaremos como convención que $J(\emptyset, Y) = [\underbrace{0:\cdots:0}_{k}] \times Y$. Observemos que $[\underbrace{0:\cdots:0}_{k}] \times Y$ es un subconjunto cerrado.

Observación 2.20. Si $X \subset \mathbb{P}^{h_1}$ e $Y \subset \mathbb{P}^{h_2}$ y los identificamos con $\tilde{X} = X \times [\underbrace{0:\cdots:0}_{h_2}] \subset \mathbb{P}^{h_1+h_2+1}$ y con $\tilde{Y} = [\underbrace{0:\cdots:0}_{h_1}] \times Y \subset \mathbb{P}^{h_1+h_2+1}$ respectivamente, el join es igual a la unión de las rectas que unen un punto de $\tilde{X}$ con un punto de $\tilde{Y}$, y en ese caso, como $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ son variedades disjuntas, la dimensión es $\dim X + \dim Y + 1$ ([**13**], página 70).

Lema 2.21. *Sea* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & \cdots & u_{2r} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \cdots & u_{kr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u_{k+1\,r+1} & \cdots & u_{k+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & u_{k+2\,r+1} & \cdots & u_{k+2\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{d\,r+1} & \cdots & u_{d\,n} \end{pmatrix}$ *tal que* $(1, ..., 1)$ *está en el espacio de filas de* A. *Entonces se tiene que* $X_A = J(X_{A_1}, X_{A_2})$ *y que* $X_A^* = J(X_{A_1}^*, X_{A_2}^*)$

Demostración. Probemos que $X_A = J(X_{A_1}, X_{A_2})$. Es claro que $\mathcal{O}([1:\cdots:1]) \subset \{[x:y] : \ [x] \in X_{A_1}, \ [y] \in X_{A_2}\}$. Por otro lado, los vectores de $Ker(A)$ son de la forma (v_1, v_2) con $v_1 \in Ker(A_1)$ y $v_2 \in Ker(A_2)$. Entonces $\{[x:y] : \ [x] \in X_{A_1}, \ [y] \in X_{A_2}\} \subset X_A$, luego tomando clausura en esta cadena de inclusiones, se deduce que $X_A = J\big(X_{A_1}, X_{A_2}\big)$.

Calculemos la variedad dual X_A^* a partir de la proposición 2.15. Consideremos

$$f_A(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i t^{u_i} = \xi_1 t_1^{u_{11}} \dots t_k^{u_{k1}} + \cdots + \xi_r t_1^{u_{1r}} \dots t_k^{u_{kr}} + \xi_{r+1} t_{k+1}^{u_{k+1\,r+1}} \dots t_d^{u_{d\,r+1}} + \cdots + \xi_n t_{k+1}^{u_{k+1\,n}} \dots t_d^{u_{d\,n}},$$

Entonces, como $(1, ..., 1)$ está en el subespacio de filas de A se tiene que

$$f_A(t) = f_{A_1}(t_1, \dots, t_k) + f_{A_2}(t_{k+1}, \dots t_d) = t_1 f_1(t_2, \dots, t_k) + t_{k+1} f_2(t_{k+1}, \dots, t_d).$$

Luego los puntos $[\xi_1 : \cdots : \xi_r : \xi_{r+1} : \cdots : \xi_n]$ tal que existe $t = (t_1, \dots, t_d) \in (\mathbb{C}^*)^d$ que cumpla con las condiciones $f_A(t) = \frac{\partial f_A}{\partial t_i} = 0$ para todo $i = 1, \dots, d$ verifican que

$$\begin{cases} f_A(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_d) = t_1 f_1(t_2, \dots, t_k) + t_{k+1} f_2(t_{k+2}, \dots, t_d) = 0 \\ \frac{\partial f_A}{\partial t_1} = f_1(t_2, \dots, t_k) = 0 \\ \frac{\partial f_A}{\partial t_i} = \frac{\partial f_1}{\partial t_i}(t_2, \dots, t_k) = 0, \ \forall\, i = 2, \dots, k \\ \frac{\partial f_A}{\partial t_{k+1}} = f_2(t_{k+2}, \dots, t_d) = 0 \\ \frac{\partial f_A}{\partial t_i} = \frac{\partial f_2}{\partial t_i}(t_{k+2}, \dots, t_d) = 0, \ \forall\, i = k+2, \dots, d \end{cases}$$

es decir $[\xi_1, \dots, \xi_r] \in X_{A_1}^*$ y $[\xi_{r+1}, \dots, \xi_n] \in X_{A_2}^*$. $\square$

Corolario 2.22. *Si* $A = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}^{k\times k} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{(n-k)\times k} \\ \hline \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{(d-k)\times k} & \overbrace{\begin{matrix} \\ A' \\ \\ \end{matrix}}^{(d-k)\times(n-k)} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ *entonces la variedad* $X_A = J\big(\mathbb{P}^{k-1}, Y\big) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ *tiene dimensión* $k + \dim X_{A'}$ *y su variedad dual* $X_A^* = [\underbrace{0 : \cdots : 0}_{k}] \times X_{A'}^*$.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del lema 2.21 con $A_1 = I_{k\times k}$. $\square$

El teorema siguiente permite hallar la dimensión de la variedad X_A^*.

Teorema 2.23. *Sean* $A = \{u_1, \ldots, u_n\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{d1} & u_{d2} & \cdots & u_{dn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ *y* $B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n-d} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n-d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn-d} \end{pmatrix} = (w_1|w_2|\ldots|w_{n-d}) \in \mathcal{M}_{n\times(n-d)}(\mathbb{Z})$ *una matriz dual de Gale para A. Definimos la matriz* $\big(A\#B\big)(s) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ *como:*

$$(A\#B)(s) = \begin{pmatrix} & & B^t & \\ \langle s, v_1\rangle & \langle s, v_2\rangle & \cdots & \langle s, v_n\rangle \\ \langle s, v_1\rangle u_{21} & \langle s, v_2\rangle u_{22} & \cdots & \langle s, v_n\rangle u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle s, v_1\rangle u_{d1} & \langle s, v_2\rangle u_{d2} & \cdots & \langle s, v_n\rangle u_{dn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n-d} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n-d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn-d} \\ \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{1i} & \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{ni} \\ \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{1i} u_{21} & \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{2i} u_{22} & \cdots & \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{ni} u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{1i} u_{d1} & \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{2i} u_{d2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n-d} s_i v_{ni} u_{dn} \end{pmatrix}.$$

Entonces $\dim(X_A^*) = \max\big\{rg\big(A\#B\big)(s) : s \in \mathbb{C}^{n-d}\big\} - 1.$

Demostración. Recordamos que, en virtud de la Observación 2.9, la función

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{C}^{n-d} & \to & \mathbb{C}^n \\ s & \mapsto & \big(\langle s, v_1\rangle, \langle s, v_2\rangle, \ldots, \langle s, v_n\rangle\big) \end{array}$$

es una parametrización de $Ker(A)$ y que $\beta_A : \mathbb{C}^{n-d} \times (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{P}^{n-1}$ definida por $\beta_A(s,t) = \big[\langle s, v_1\rangle t^{u_1} : \cdots : \langle s, v_n\rangle t^{u_n}\big]$ es una parametrización racional de X_A^*. Entonces la dimensión de X_A^* es igual al máximo de los rangos del diferencial asociado a la parametrización.
Consideremos el morfismo

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_A\#g) : \mathbb{C}^{n-d} \times (\mathbb{C}^*)^d & \to & \mathbb{C}^n \\ \big((s_1, \ldots, s_{n-d}), t\big) & \mapsto & \big(\langle s, v_1\rangle t^{u_1}, \ldots, \langle s, v_n\rangle t^{u_n}\big) \end{array}.$$

Entonces el morfismo $\varphi_A\#g$ corresponde a la parametrización β_A en el espacio afín correspondiente y el rango del diferencial asociado a $\varphi_A\#g$ es uno más que el rango del diferencial asociado a β_A. Consideremos la matriz jacobiana de $(\varphi_A \# g)$:

$$J_{(\varphi_A\#g)}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1}\big(\langle s,v_1\rangle t^{u_1}\big) & \cdots & \frac{\partial}{\partial s_1}\big(\langle s,v_n\rangle t^{u_n}\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial s_{n-d}}\big(\langle s,v_1\rangle t^{u_1}\big) & \cdots & \frac{\partial}{\partial s_{n-d}}\big(\langle s,v_n\rangle t^{u_n}\big) \\ \frac{\partial}{\partial t_1}\big(\langle s,v_1\rangle t^{u_1}\big) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_1}\big(\langle s,v_n\rangle t^{u_n}\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_d}\big(\langle s,v_1\rangle t^{u_1}\big) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_d}\big(\langle s,v_n\rangle t^{u_n}\big) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}.$$

Como $t_1,\dots,t_d \in \mathbb{C}^*$ se tiene que $rg\big(J_{(\varphi_A\#g)}(s,t)\big) = rg\big(J^T_{(\varphi_A\#g)}(s,t)\big)$, donde $J^T_{(\varphi_A\#g)}(s,t)$ es la *matriz jacobiana tórica* respecto de $t_1,\dots,t_d$, que definimos por:

$$J^T_{(\varphi_A\#g)}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1}\big(\langle s,v_1\rangle t^{u_1}\big) & \cdots & \frac{\partial}{\partial s_1}\big(\langle s,v_n\rangle t^{u_n}\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial s_{n-d}}\big(\langle s,v_1\rangle t^{u_1}\big) & \cdots & \frac{\partial}{\partial s_{n-d}}\big(\langle s,v_n\rangle t^{u_n}\big) \\ t_1\frac{\partial}{\partial t_1}\big(\langle s,v_1\rangle t^{u_1}\big) & \cdots & t_1\frac{\partial}{\partial t_1}\big(\langle s,v_n\rangle t^{u_n}\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_d\frac{\partial}{\partial t_d}\big(\langle s,v_1\rangle t^{u_1}\big) & \cdots & t_d\frac{\partial}{\partial t_d}\big(\langle s,v_n\rangle t^{u_n}\big) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}.$$

Sea $M_A(t) = \begin{pmatrix} t^{u_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t^{u_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t^{u_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $t \in (\mathbb{C}^*)^d$. Es claro que $\big(A\#B\big)(s)$ es igual al producto de las matrices $J^T_{(\varphi_A\#g)}(s,t)$ y $M_A(t)^{-1}$; luego, el rango del diferencial de $\varphi_A\#g$ es independiente de t. Como $rg\big(J(s,t)\big) = rg\big(A\#B\big)(s)$, entonces concluímos que $\dim X_A^* = \max\big\{rg\big(A\#B\big)(s) :\ s\in\mathbb{C}^{n-d}\big\} - 1$. □

Observación 2.24. La matriz $\big(A\#B\big)(s)$ tiene rango menor que n ya que la $(n-d+1)$-ésima fila se obtiene como combinación lineal de las $n-d$ anteriores.

Ejemplo 2.25. Consideramos nuevamente la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y una matriz dual de Gale $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para A. La variedad tórica asociada X_A es $\overline{\big\{[t:ts:ts^2:ts^3]\ :\ (t,s)\in(\mathbb{C}^*)^2\big\}}$; es la "twisted cubic".
Entonces:

$$(A\#B)(s) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ s_1\cdot 1 & (-2s_1+s_2)\cdot 1 & (s_1-2s_2)\cdot 1 & s_2\cdot 1 \\ s_1\cdot 0 & (-2s_1+s_2)\cdot 1 & (s_1-2s_2)\cdot 2 & s_2\cdot 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z})$$

El rango de la matriz $\big(A\#B\big)(s)$ es menor o igual a 3 para todo $s\in(\mathbb{C}^*)^2$ ya que la tercera fila es combinación lineal de las dos anteriores (Observación 2.24). Como

$det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2s_1+s_2 & 3s_2 \end{pmatrix} = 3s_2+2s_1-s_2 = 2s_2+2s_1$, claramente obtenemos que máx $\big(rg\big(A\#B\big)(s)\big) = 3$ y $\dim X_A^* = 2$.

En lo que sigue nos interesaremos en un tipo particular de matrices que necesitaremos considerar a los efectos de caracterizar las variedades tóricas autoduales.

Definición 2.26. Decimos que la matriz $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ es *piramidal* si existe alguna matriz $M \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{Q})$ invertible tal que $MA \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix},$$

a menos de permutaciones de columnas.

El hecho que A no sea piramidal equivale a que no exista ningún hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que contenga exactamente a $n-1$ columnas de la matriz A.

Lema 2.27. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$. Son equivalentes:*

1. *La matriz A es piramidal.*
2. *El núcleo de A está contenido en un hiperplano coordenado $(x_i = 0)$ para algún $i = 1, \dots, n$.*
3. *La variedad X_A^* está contenida en un hiperplano coordenado $(x_i = 0)$ para algún $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Como A y MA tienen el mismo núcleo, podemos suponer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix}$. Luego si $(x_1, \dots, x_n) \in Ker(A)$ entonces $x_1 = 0$ de donde se deduce (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Recordamos que el Teorema 2.11 afirma que la variedad dual $X_A^* = \overline{\big\{\big[\langle s, v_1\rangle t^{u_1} : \dots : \langle s, v_n\rangle t^{u_n}\big] : s \in \mathbb{C}^{n-d} \setminus \{0\},\ t \in (\mathbb{C}^*)^d\big\}}$, siendo $B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ una matriz dual de Gale para A. Si el núcleo de A está contenido en un hiperplano coordenado, supongamos $Ker(A) \subset (x_1 = 0)$, entonces $v_1 = \overrightarrow{0}$ y $\langle s, v_1\rangle = 0$ para todo $s \in \mathbb{C}^{n-d} \setminus \{0\}$. Luego X_A^* está incluida en el hiperplano coordenado $(x_1 = 0)$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Supongamos que X_A^* está contenida en $(x_1 = 0)$. Como $Ker(A) \subset X_A^*$ por el Teorema 2.11, entonces $Ker(A)$ también está contenido en este hiperplano.

(2) $\Rightarrow$ (1): Supongamos que $Ker(A) \subset (x_1 = 0)$. Entonces $(1, 0, \dots, 0)$ pertenece al complemento ortogonal de $Ker(A)$, es decir al subespacio fila de A. Luego podemos

suponer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & & & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix}$. Multiplicando por una matriz invertible M se concluye que $MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}$, es decir, A es piramidal.

□

Supongamos que $d < n$ y que A es una matriz piramidal. Entonces podemos suponer que A es de la forma

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

con $A_1 \in \mathcal{M}_{(d-1)\times(n-1)}$. Observar que si $(1,\dots,1) \in \mathbb{Z}^n$ está en el subespacio fila de A y $e_1 = (1,0,\dots,0)$ también, entonces $(1,\dots,1) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ está en el subespacio fila de A_1.

Lema 2.28. *Si $A \in \mathcal{M}_{d\times n}$, existe $p \in Ker(A)$ tal que todas sus coordenadas son no nulas si y sólo si no existe $i = 1,\dots,n$ tal que $Ker(A) \subset (x_i = 0)$. Es decir existe un punto $p \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ si y sólo si $Ker(A)$ no está contenido en ningún hiperplano coordenado.*

Demostración. Es claro que si $Ker(A)$ está contenido en algún hiperplano coordenado $(x_i = 0)$ entonces el producto de las coordenadas de todos los puntos de $Ker(A)$ es nulo.
Recordar que la unión finita de subespacios es un subespacio si y solamente si los subespacios están incluidos unos en otros. Si no existiese $p \in Ker(A)$ con todas sus coordenadas no nulas entonces $Ker(A) \subset (x_1 = 0) \cup \dots \cup (x_n = 0)$, y como $Ker(A)$ es un subespacio entonces existiría i tal que $Ker(A) \subset (x_i = 0)$, lo cual contradice la hipótesis. □

Observación 2.29. El lema anterior, junto con el lema 2.27, implican que si A no es piramidal, entonces existe un punto $p \in Ker(A)$ con todas sus coordenadas no nulas.

Lema 2.30. *Sean $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ y $A_1 \in \mathcal{M}_{(d-1)\times n}(\mathbb{Z})$ como en (2.4), entonces $X_A^* = [\underbrace{0}_{1}] \times X_{A_1}^* \subset (\mathbb{P}^{n-1})^*$, con $X_{A_1}^* \subset (\mathbb{P}^{n-2})^*$*

Demostración. En efecto el vector $(x_1, x') \in Ker(A)$ si y sólo si $x_1 = 0$ y el vector $x' \in Ker(A_1)$, lo cual prueba el resultado.

□

El Lema 2.30 afirma que si A es piramidal, X_A^* está contenido en el hiperplano $\{x_1 = 0\}$; por lo que podemos restringir nuestro estudio al de la variedad dual

$X^*_{A_1}$. Si A_1 es piramidal reiteramos este procedimiento hasta que lleguemos a una configuración que no sea piramidal.

Ejemplo 2.31. Este último ejemplo será retomado de manera general en el capítulo siguiente. Consideramos la familia de matrices $\{A_\alpha\}$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ dada por $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. Entonces una matriz dual de Gale para A_α es la matriz $B_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si $1+\alpha = 0$ o bien $\alpha = 0$, entonces $Ker(A_\alpha)$ está contenido en un hiperplano coordenado, es decir A_α es piramidal. Supongamos que $\alpha = -1$. Entonces $A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $X_{A_{-1}} = \big\{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5] \in \mathbb{P}^4 : x_2 - x_5 = x_3 - x_4 = 0\big\}$ y $X^*_{A_{-1}} = \big\{[\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 : \xi_5] : x_1 = x_2 - x_5 = x_3 - x_4 = 0\big\}$. Claramente, $X_{A_{-1}}$ no es autodual ya que las dimensiones de $X_{A_{-1}}$ y de $X^*_{A_{-1}}$ son distintas. Observar que $X_{A_{-1}}$ es una variedad lisa porque es lineal. Análogamente X_{A_0} es una variedad tórica lisa no autodual. En el Ejemplo 3.23 del capítulo 3, veremos que para cualquier otro valor de α, X_{A_α} es una variedad tórica singular autodual.

Concluimos este capítulo con dos resultados importantes.

Proposición 2.32. *Supongamos que A no es piramidal. Entonces* $\dim X^*_A \geq \dim X_A$.

Demostración. Por el Teorema 2.11 tenemos que $X^*_A = \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{P}\left(Ker(A)\right)} \mathcal{O}(p)}$, y como A no es piramidal, existe $p \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$.
Luego $\overline{\bigcup_{p \in \mathbb{P}\left(Ker(A)\right)} \mathcal{O}(p)} \supset \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{P}\left(Ker(A)\right) \cap \mathbb{T}^{n-1}} \mathcal{O}(p)} = \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{P}\left(Ker(A)\right) \cap \mathbb{T}^{n-1}} p * \mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)}$ $\supset \bigcup_{p \in \mathbb{P}\left(Ker(A)\right) \cap \mathbb{T}^{n-1}} p * \overline{\mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}\left(Ker(A)\right) \cap \mathbb{T}^{n-1}} p * X_A \neq \emptyset$. Como $\dim X_A = \dim p * X_A$, entonces $\dim X^*_A \geq \dim X_A$. □

Proposición 2.33. *Si la matriz A es piramidal y no tiene columnas repetidas entonces X_A no puede ser autodual.*

Demostración. Por un lado si A es piramidal entonces X^*_A está contenida en algún hiperplano coordenado. Por otro lado, como la matriz A no tiene columnas repetidas entonces, por el Lema 1.44, X_A no está contenida en ningún hiperplano. Si X_A fuese autodual, existiría un automorfismo f de $\mathbb{P}^{n-1}$ tal que $f(X_A) = X^*_A$; pero f lleva hiperplanos en hiperplanos, lo cual es una contradicción. □

Capítulo 3

Variedades tóricas proyectivas autoduales

Nuestro problema original era caracterizar las variedades tóricas autoduales del tipo X_A, es decir, habiendo identificado $\mathbb{P}^{n-1}$ y $(\mathbb{P}^{n-1})^*$, nos preguntamos cuando existe un automorfismo f de $\mathbb{P}^{n-1}$ tal que $f(X_A) = X_A^*$. En este capítulo damos una respuesta a esta pregunta. En la primer sección, con los Teoremas 3.3 y 3.7, en el caso que la matriz A no sea piramidal. El caso general se trata en la sección 2. Luego, en la sección 3, damos ejemplos de variedades autoduales: variedades asociadas a matrices de Lawrence, las inmersiones de Segre, etc. Luego construimos familias de variedades autoduales no lisas ampliando de esta manera las listas hasta ahora conocidas. Finalmente, en la sección 4, nos interesamos en el caso de las variedades *fuertemente autoduales*, es decir al caso en que el automorfismo f entre X_A y X_A^* sea la identidad. Con el Teorema 3.27 adaptamos el Teorema 3.7 de la sección anterior y damos una condición sobre las filas de las matrices de Lawrence para que la variedad X_A sea fuertemente autodual (Teorema 3.30). Nuevamente, a lo largo de este capítulo, supondremos que $A = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ es de rango máximo, que sus columnas generan a $\mathbb{Z}^d$ como $\mathbb{Z}$-módulo y que $(1, \dots, 1)$ es la primera fila de A.

1. El caso no piramidal

En el segundo ejemplo de 2.17, mostramos, que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la variedad X_A es autodual y $[1 : -1 : 1 : -1] * X_A = X_A^*$. Observar que A no es piramidal y que un dual de Gale de A es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y que $[1 : -1 : 1 : -1] \in Ker_{\mathbb{Z}}(A)$. Es esta idea la que generalizamos en el teorema siguiente. Antes, necesitaremos una observación.

Observación 3.1. Si una matriz A no es piramidal entonces se tiene que $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) = \overline{\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}}$ pues $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ es un abierto denso y no vacío de la variedad irreducible $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)$ (ver Lema 2.28).

Teorema 3.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ no piramidal y X_A la variedad tórica asociada. Son equivalentes:*

1. *X_A es autodual.*
2. *$\exists\, p_0 \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ tal que $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset \overline{\mathcal{O}(p_0)}$.*
3. *$\forall\, p \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ se tiene que $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset \overline{\mathcal{O}(p)}$.*
4. *$\forall\, p_0 \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ tal que $X_A^* = p_0 * X_A$.*

5. $\exists\, p_0 \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ *se tiene que* $X_A^* = p_0 * X_A$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Como X_A es autodual entonces $\dim(X_A) = \dim(X_A^*)$. Por otro lado,

$$X_A^* = \overline{\bigcup_{p\in\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)} \mathcal{O}(p)} = \overline{\bigcup_{p\in\overline{\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)\cap\mathbb{T}^{n-1}}} \mathcal{O}(p)} \supset \overline{\bigcup_{p\in\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)\cap\mathbb{T}^{n-1}} \mathcal{O}(p)} \supset \overline{\mathcal{O}(p_0)},$$

para algún $p_0 \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big)\cap\mathbb{T}^{n-1}$ que fijamos. Como $\dim\overline{\mathcal{O}(p_0)} = \dim p_0 * \overline{\mathcal{O}\big([1:\cdots:1]\big)} = \dim X_A = \dim X_A^*$, dado que X_A^* y $\overline{\mathcal{O}(p_0)}$ son ambas variedades irreducibles, deducimos que $X_A^* = \overline{\mathcal{O}(p_0)}$. Como $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset X_A^*$ entonces $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset \overline{\mathcal{O}(p_0)}$.

2) $\Rightarrow$ 3): Supongamos que $\exists\, p_0 \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ tal que $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset \overline{\mathcal{O}(p_0)}$. Si $p \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ entonces $p \in \overline{\mathcal{O}(p_0)} \cap \mathbb{T}^{n-1} = \mathcal{O}(p_0)$. Luego, como $p \in \mathcal{O}(p_0)$ tenemos que $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(p_0)$.

3) $\Rightarrow$ 4): Si todo punto $p \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big)\cap\mathbb{T}^{n-1}$ es tal que $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset \overline{\mathcal{O}(p)}$ entonces:

$$X_A^* = \overline{\bigcup_{p\in\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)} \mathcal{O}(p)} = \overline{\bigcup_{p\in\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)\cap\mathbb{T}^{n-1}} \mathcal{O}(p)} = \overline{\mathcal{O}(p_0)} = p_0 * X_A$$

para todo $p_0 \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$.

4) $\Rightarrow$ 5): Es obvio.

5) $\Rightarrow$ 1): Basta considerar el automorfismo f de $\mathbb{P}^{n-1}$ dado por $f(v) = p_0 * v$. □

Teorema 3.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ no piramidal y X_A la variedad tórica asociada. Entonces X_A es autodual si y sólo si* $\dim X_A = \dim X_A^*$.

Demostración. Es claro que si X_A es autodual entonces las dimensiones de X_A y de X_A^* coinciden. Supongamos que $\dim X_A = \dim X_A^*$ y sea $p_0 \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big)\cap\mathbb{T}^{n-1}$. Entonces $\mathcal{O}(p_0) \subset X_A^*$. Luego $p_0 * \overline{\mathcal{O}\big([1:\cdots:1]\big)} \subset X_A^*$ y $p_0 * \overline{\mathcal{O}\big([1:\cdots:1]\big)}$ tiene la misma dimensión que X_A ya que $\overline{\mathcal{O}\big([1:\cdots:1]\big)} = X_A$. Entonces existe $p_0 \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ tal que $p_0 * X_A = X_A^*$, es decir, por el Teorema 3.2, X_A es autodual. □

Antes de pasar al resultado principal de este capítulo veamos algunos corolarios inmediatos.

Corolario 3.4. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ no piramidal y X_A la variedad tórica asociada. Entonces si X_A es una hipersuperficie, X_A es autodual.*

Demostración. Si A no es piramidal, sabemos por la Proposición 2.32 que $\dim X_A^* \geq \dim X_A$. Como X_A es una hipersuperficie, se tiene que $\dim X_A^* = \dim X_A$ ($X_A^* \neq \mathbb{P}^{n-1}$ pues de lo contrario X_A sería vacía), y luego por el Teorema 3.3, X_A es autodual. □

Corolario 3.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ no piramidal y X_A la variedad tórica asociada. Si X_A es autodual entonces $2d \geq n$.*

Demostración. Por un lado, en virtud del Teorema 2.11, se tiene que $\dim X_A^* \geq \dim \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) = n - d - 1$. Por otro lado, el Teorema 3.3 implica que $d - 1 = \dim X_A = \dim X_A^*$. Entonces $2d \geq n$. □

Corolario 3.6. *Sea* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & \cdots & u_{2r} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & \cdots & u_{kr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u_{k+1\,r+1} & \cdots & u_{k+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & u_{k+2\,r+1} & \cdots & u_{k+2\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{d\,r+1} & \cdots & u_{d\,n} \end{pmatrix}$ *una matriz no piramidal. Entonces X_A es autodual si y sólo si X_{A_1} y X_{A_2} son autoduales.*

Demostración. La variedad X_A es autodual si y sólo si $\dim X_A = \dim X_A^*$. Es decir, por el lema 2.21, $\dim X_{A_1} + \dim X_{A_2} + 1 = \dim X_{A_1}^* + \dim X_{A_2}^* + 1$. Como A no es piramidal, A_1 y A_2 tampoco lo son, lo cual implica que $\dim X_{A_1}^* \geq \dim X_{A_1}$ y $\dim X_{A_2}^* \geq \dim X_{A_2}$ y entonces de la igualdad anterior se deduce que $\dim X_{A_1}^* = \dim X_{A_1}$ y $\dim X_{A_2}^* = \dim X_{A_2}$, es decir X_{A_1} y X_{A_2} son autoduales. El recíproco es claro. □

El teorema siguiente permite a partir de una condición necesaria y suficiente sencilla caracterizar las variedades autoduales de modo algorítmico. Agradecemos al Prof. Eduardo Cattani su sugerencia para enunciarlo.

Teorema 3.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ no piramidal y* $B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *una matriz dual de Gale de A como en (2.1).*
Entonces X_A es autodual si y solamente si para toda recta L que pasa por el origen, se cumple $\sum_{v_i \in L} v_i = 0$.

Demostración. En virtud del Teorema 3.2, X_A es autodual si y sólo si existe $p_0 = [p_{01} : p_{02} : \cdots : p_{0n}] \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$ tal que $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset \overline{\mathcal{O}(p_0)}$. Luego X_A es autodual si y sólo si:

$$\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1} \subset \overline{\mathcal{O}(p_0)} \cap \mathbb{T}^{n-1} = p_0 * \overline{\mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)} \cap \mathbb{T}^{n-1} = p_0 * X_A \cap \mathbb{T}^{n-1}.$$

Entonces, como todo vector de $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)$ es de la forma $[s, v] := \big[\langle s, v_1\rangle : \langle s, v_2\rangle : \cdots : \langle s, v_n\rangle\big]$ para algún $s \in \mathbb{C}^{n-d} \setminus \{0\}$, recordando las ecuaciones obtenidas en el Corolario 1.59, se tiene que X_A es autodual si y sólo si para todo $[s, v]$,

$$p_0^{w_i^-} * [s,v]^{w_i^+} - p_0^{w_i^+} * [s,v]^{w_i^-} = 0 \quad \forall\, i = 1,\dots,n-d.$$

siendo w_i la i-ésima columna de la matriz B. Es decir, para todo $[s,v]$,

$$p_0^{w_i^-} \prod_{\substack{j=1 \\ v_{ji}>0}}^{n} \langle s, v_j\rangle^{v_{ji}} = p_0^{w_i^+} \prod_{\substack{j=1 \\ v_{ji}<0}}^{n} \langle s, v_j\rangle^{-v_{ji}}, \quad \forall\, i = 1,\dots,n-d.$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ v_{ji}>0}}^{n} \langle s, v_j\rangle^{v_{ji}} = p_0^{w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ v_{ji}<0}}^{n} \langle s, v_j\rangle^{-v_{ji}}, \quad \forall\, i = 1,\dots,n-d.$$

La igualdad anterior es una igualdad polinomial en $\mathbb{C}[s_1,\dots,s_n]$; los dos polinomios deben entonces tener los mismos factores irreducibles ya que $\mathbb{C}[s_1,\dots,s_n]$ es un dominio de factorización única. Entonces como $\langle s, v_i\rangle$ y $\langle s, v_j\rangle$ son factores irreducibles asociados si y sólo si los vectores v_i y v_j son linealmente dependientes, se sigue que para toda recta L y para todo j se tiene que

$$\sum_{v_i\in L, v_{ji}>0} v_{ji} = -\sum_{v_i\in L, v_{ji}<0} v_{ji},$$

luego $\sum_{v_i\in L} v_{ji} = 0$ para todo j y por lo tanto $\sum_{v_i\in L} v_i = 0$.

□

Ejemplos 3.8. Para ilustrar las igualdades polinomiales que aparecen en la demostración del Teorema 3.7, veamos los sigueintes ejemplos:

(1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz del Ejemplo 2.13 y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un dual de Gale. Entonces $w_1 = (1,0,1) - (0,2,0)$ y $\beta_A(s,t) = [st_1 : -2st_1t_2 : st_1t_2^2]$. Luego $s^1(-2s)^0s^1 = 1^1(-2)^{-2}1^1s^0(-2s)^2s^0$, $\forall\, s \in \mathbb{C}^*$, lo cual prueba que X_A es autodual.

(2) Volvamos al Ejemplo 2.14 de la inmersión de Segre donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y una matriz dual de Gale para A es $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La parametrización de la variedad dual de X_A es $\beta_A(s,t) = \big[(-s_1-s_2)t_1t_2 : s_1t_1t_3 : s_2t_1t_4 : (s_1+s_2)t_2 : -s_1t_3 : -s_2t_4\big]$. Los vectores columnas de B se escriben como $w_1 = (0,1,0,1,0,0) - (1,0,0,0,1,0)$ y $w_2 = (0,0,1,1,0,0) - (1,0,0,0,0,1)$. Entonces:

$$(-s_1-s_2)^0{s_1}^1s_2^0(s_1+s_2)^1(-s_1)^0(-s_2)^0 = (-s_1-s_2)^1{s_1}^0s_2^0(s_1+s_2)^0(-s_1)^1(-s_2)^0$$

$$s_1(s_1+s_2) = (-s_1-s_2)(-s_1) \quad \forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{C}$$

y

$$(-s_1-s_2)^0 {s_1}^0 s_2^1 (s_1+s_2)^1(-s_1)^0(-s_2)^0 = (-s_1-s_2)^1 {s_1}^0 s_2^0 (s_1+s_2)^0(-s_1)^0(-s_2)^1$$

$$s_2(s_1+s_2) = (-s_1-s_2)(-s_2) \quad \forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{C}.$$

lo cual permite reencontrar el hecho conocido que la inmersión de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ es autodual. Por otro lado en el Ejemplo 2.14 ya teníamos que $\dim X_A = 3$. Entonces $\dim X_A^* = 3$, y X_A es defectiva ya que X_A^* no es una hipersuperficie en $\mathbb{P}^5$.

En el enunciado del Teorema 3.7, la hipótesis de que A no sea piramidal es necesaria, como lo muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y una matriz dual de Gale para A es la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces la dimensión de la variedad X_A es 4.

Cambiando el orden de las columnas y haciendo combinaciones lineales sobre las filas, la matriz A es piramidal, por lo que siguiendo las ideas del lema 2.30, se llega a una matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces la variedad $X_{A_1} = \overline{\{[t:t:s:s] : t, s \in \mathbb{C}^*\}} = \{x_0 - x_1 = x_2 - x_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ y $X_{A_1}^* = \{x_0 + x_1 = x_2 + x_3 = 0\}$. Entonces $\dim X_{A_1}^* = 1$. Como $X_{A_1}^* \simeq X_A^*$, se tiene que $\dim X_A \neq \dim X_{A_1}^*$, lo cual implica obviamente que X_A no es autodual. Sin embargo, obsérvese que en la matriz B la suma de los vectores filas que se encuentran sobre una misma recta es nula.

2. El caso general

En esta sección generalizamos los resultados vistos en la sección anterior, eliminando la hipótesis que la matriz A no sea piramidal para caracterizar las variedades tóricas proyectivas del tipo X_A que son autoduales. Seguiremos asumiendo las reducciones hechas en el capítulo 1.

Definición 3.10. Sea k un entero positivo. Decimos que una matriz $C \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ es k-piramidal si existe alguna matriz $M \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{Q})$ invertible tal que

$$MC = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}^{k\times k} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{(n-k)\times k} \\ \hline \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{(d-k)\times k} & \overbrace{\begin{matrix} \\ D \\ \\ \end{matrix}}^{(d-k)\times(n-k)} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z}), \tag{3.1}$$

a menos de permutaciones de columnas, donde I_k es la matriz identidad de tamaño $k \times k$ y D es no piramidal.

Nuevamente, al ser X_C y X_{MC} isomorfas como variedades inmersas, supondremos que si C es k-piramidal entonces C es de la forma (3.1). Observamos que el caso piramidal es un caso particular de la definición anterior, tomando $k = 1$.

TEOREMA 3.11. *Sea $A = (u_1|\cdots|u_n) \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$, con columnas $u_1, \ldots, u_h$ repetidas respectivamente $k_i + 1$ veces, $k_i \geq 0$. Sea $C \in \mathcal{M}_{d\times h}(\mathbb{Z})$ con columnas sin repetir $u_1, \ldots, u_h$. Sea $k = k_1 + \cdots + k_h \in \mathbb{Z}$. Entonces X_A es autodual si y sólo si C es k-piramidal y si escribimos $C = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, $X_D \subset \mathbb{P}^{h-k-1}$ es autodual.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que C es una r-pirámide y que X_A es autodual. Entonces, por la proposición 2.22, $X_C = J(\mathbb{P}^{r-1}, X_D)$. Por otro lado, por el corolario 1.47, podemos asumir que $X_A = [\underbrace{0 : \cdots : 0}_{k}] \times X_C$ y $\dim X_A = \dim X_C$; luego $X_A = [\underbrace{0 : \cdots : 0}_{k}] \times J(\mathbb{P}^{r-1}, X_D)$. Como C no tiene columnas repetidas, la matriz D tampoco, y el menor subespacio que contiene a X_A tiene codimensión k (Lema 1.46). Entonces $X_A^* = J(\mathbb{P}^{k-1}, X_C^*) = J(\mathbb{P}^{k-1}, [\underbrace{0 : \cdots : 0}_{r}] \times X_D^*)$, lo cual implica que X_A^* está contenida en un subespacio de codimensión r. Como X_A es autodual, existe un automorfismo $f : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ que lleva subespacios en subespacios de la misma dimensión, entonces X_A está contenida en un subespacio de codimensión r; luego, por minimalidad, $k \geq r$.
Por otro lado, como X_A es autodual se tiene que $\dim X_A = \dim X_A^*$ y entonces $r + \dim X_D = k + \dim X_D^*$. Como D no es piramidal, por la Proposición 2.32, $\dim X_D^* \geq \dim X_D$, entonces $r \geq k$, lo cual implica que $k = r$, y luego $\dim X_D = \dim X_D^*$. Nuevamente como D no es piramidal, X_D es autodual.

Supongamos que A tiene $\sum_{i=1}^{h} k_i = k$ columnas repetidas y que $C = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ es k-piramidal $-$ la matriz D no tiene columnas repetidas pues C no las tiene $-$. Por el Corolario 1.47, podemos suponer que $X_A = [\underbrace{0 : \cdots : 0}_{k}] \times X_C$, luego $X_A =$

$[\underbrace{0:\cdots:0}_{k}]\times J\big(\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{C}),\, X_D\big)$. Entonces $X_A^* = J\big(\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{C}),\, [\underbrace{0:\cdots:0}_{k}]\times X_D^*\big)$. Es claro que en este caso X_A es autodual si y sólo si X_D es autodual.

$\square$

Para ilustrar el Teorema 3.11, veamos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.12. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 8}(\mathbb{Z})$. Como la segunda columna de A se repite una vez, consideremos la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 7}(\mathbb{Z})$. Entonces C es $1-$piramidal y si D es la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z})$, una matriz dual de Gale para D es, por ejemplo, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces por el Teorema 3.11, X_A es autodual.

3. Construcción de familias de variedades autoduales

En esta sección daremos ejemplos de variedades tóricas proyectivas autoduales del tipo X_A, basándonos en el resultado obtenido en el Teorema 3.7. Con el objetivo de obtener más ejemplos que completen la lista de variedades autoduales hasta ahora conocidas, construiremos varias familias de matrices que producen variedades del tipo X_A autoduales, en particular no lisas. Probaremos que las variedades que provienen de matrices de Lawrence (Definición 3.14) son autoduales y reobtendremos, como caso particular, el resultado conocido que muestra que las inmersiones de Segre son autoduales. Finalizaremos esta sección construyendo familias de variedades tóricas proyectivas singulares que no provienen de matrices de Lawrence, que son autoduales.

Ejemplo 3.13. Probemos nuevamente, usando el Teorema 3.7, que la inmersión de Segre vista en el Ejemplo 2.14 es autodual.

Recordamos que la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; una matriz dual de Gale correspondiente es $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En este caso $v_1 = (-1,-1), v_2 = (1,0), v_3 = (0,1), v_4 = (1,1), v_5 = (-1,0)$ y $v_6 = (0,-1)$. Sea L_1 la recta de ecuación $y = x$, L_2 la recta de ecuación $y = 0$ y L_3 la recta de ecuación $x = 0$. Entonces:

$$\begin{cases} v_1, v_4 \in L_1 \text{ y } v_1 + v_4 = (0,0) \\ v_2, v_5 \in L_2 \text{ y } v_2 + v_5 = (0,0) \\ v_3, v_6 \in L_3 \text{ y } v_3 + v_6 = (0,0) \end{cases}$$

El Teorema 3.7 implica que la inmersión de Segre es autodual.

DEFINICIÓN 3.14. Una matriz A es de *Lawrence* si existe una matriz P con entradas racionales e inyectiva tal que $PA = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d\times 2n}(\mathbb{Z})$, siendo $M \in \mathcal{M}_{(n-d)\times n}(\mathbb{Z})$.

Sin pérdida de generalidad y sabiendo que en ese caso $X_{PA} = X_A$ (Teorema 1.37), supondremos que las matrices de Lawrence son de la forma:

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & M \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

LEMA 3.15. *Sea A una matriz de Lawrence como en (3.1). Entonces:*

1. $Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix} : v \in Ker(M) \right\}$.
2. *A es piramidal si y sólo si M es piramidal.*

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación es clara a partir de la forma (3.1) de las matrices de Lawrence. Para la otra, si M es piramidal, todo vector $v \in Ker(M)$ tiene alguna coordenada nula, y esto implica, por la parte 1, que A es piramidal. Recíprocamente, si A es piramidal todo vector $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix} \in Ker(A)$ tiene alguna coordenada nula. Si $v_j = 0$ para algún $j = 1, \dots, n$ entonces $v_{n+j} = -v_j = 0$, luego la parte 1 concluye que M es piramidal.

□

COROLARIO 3.16. *Si A es una matriz de Lawrence no piramidal entonces X_A es autodual.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del lema anterior y del Teorema 3.7. $\square$

Ejemplo 3.17. Veamos como a partir de lo anterior podemos probar que las inmersiones de Segre $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{2n-1}$ en general son autoduales. En efecto, el morfismo $\varphi : \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{2n-1}$ está definido por:

$$\varphi\big([y_0 : y_1 : \cdots : y_n], [x_0 : x_1]\big) = [y_0x_0 : y_1x_0 : \cdots : y_nx_0 : y_0x_1 : y_1x_1 : \cdots : y_nx_1]$$

y la matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Como la penúltima fila se obtiene sumando las $n-2$ primeras y restando la última, la variedad tórica coincide con la que se asocia a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & I_n & & & & I_n & & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior es una matriz de Lawrence no piramidal y por lo tanto es autodual. Observamos claramente, a partir del Teorema 1.60, que dichas variedades son lisas.

Ejemplo 3.18. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Una matriz dual de Gale para A es la matriz $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observar que A no es piramidal, ni tampoco es Lawrence por la forma que tienen los vectores del núcleo de A.

Los vectores filas de B son $v_1 = (-2,1), v_2 = (-2,1), v_3 = (-2,2), v_4 = (-2,0), v_5 = (4,-2), v_6 = (1,-1), v_7 = (1,0), v_8 = (1,-1)$ y $v_9 = (1,0)$. Sea L_1 la recta de ecuación $x - 2y = 0$, L_2 la recta de ecuación $y = x$ y L_3 la recta de ecuación $y = 0$. Entonces:

$$\begin{cases} v_1, v_2, v_5 \in L_1 \text{ y } v_1 + v_2 + v_5 = (0,0) \\ v_3, v_6, v_8 \in L_2 \text{ y } v_3 + v_6 + v_8 = (0,0) \\ v_4, v_7, v_9 \in L_3 \text{ y } v_4 + v_7 + v_9 = (0,0) \end{cases},$$

y esto prueba que X_A es una variedad autodual.

Recordamos que si $X \subset \mathbb{P}^N$ es una variedad proyectiva, $\dim X = m$, genéricamente la dimensión de la variedad dual X^* es $N-1$ y que el defecto de X es $def(X) = N - 1 - \dim X^*$. En [**7**], Ein da una demostración del resultado siguiente, obtenido por Landman (no publicado):

Teorema 3.19. *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva lisa no lineal tal que $\dim X = m$ y $def(X) = k > 0$. Entonces $m \equiv k$ (2).*

Con las suposiciones sobre A hechas al principio del capítulo, la variedad X_A tiene dimensión $d-1$. Entonces como el defecto de X_A es $def(X_A) = N - 1 - \dim X_A^*$, si X_A es autodual tenemos que:

$$def(X_A^*) = (n-1) - 1 - (d-1) = n - 2 - (d-1) = n - d - 1.$$

En nuestro caso, si X_A es lisa entonces $d - 1 \equiv n - d - 1$ (2), es decir $n \equiv 2d$ (2), o sea n debe ser par; el teorema 3.19 se reescribe

Proposición 3.20. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ y X_A la variedad tórica proyectiva. Si X_A es no lineal, autodual y lisa entonces n es par.*

Ejemplo 3.21. El teorema anterior muestra que si bien la variedad asociada a la matriz del Ejemplo 3.18 es autodual y no es lisa ya que $n = 9$.

En los ejemplos que siguen presentamos familias de variedades autoduales no lisas provenientes de matrices que no son de tipo Lawrence.

Ejemplo 3.22. Supongamos que $n = 7$ y consideramos la familia B_α de matrices dados por

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la familia de $\{A_\alpha\}, \alpha \in \mathbb{Z}$ de matrices definidas por:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $A_\alpha B_\alpha = 0$; más aún para cada α, B_α es una matriz dual de Gale para A_α. Observar que el caso $\alpha = 0$ fue tratado en el Ejemplo 3.9, y que si $\alpha \neq 0$ entonces A_α no tiene columnas repetidas. La dimensión de la variedad X_{A_α} es 4.
Consideremos las rectas $L_1 : y = 0, L_2 : y = x$ y $L_3 : x = 0$ y en cada caso, la suma de $(2\alpha, 0), (-\alpha, 0)(-\alpha, 0) \in L_1$, $(1, 1), (-1, -1) \in L_2$, y $(0, 1), (0, -1) \in L_3$ es nula. Por lo tanto, el Teorema 3.7 implica que la variedad X_{A_α} es autodual. Por otro lado estas variedades no son lisas ya que n es impar.
Consecuencias: este ejemplo nos permite
• construir familias de variedades autoduales X_A, para cualquier $n \geq 7$ y con $\dim Ker(A_\alpha) = 2$. Efectivamente, basta considerar matrices $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_r & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $\alpha_i \neq 0, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0$ y las matrices A correspondientes.
• construir familias de variedades autoduales X_A con el núcleo de cualquier codimensión. Efectivamente, si el núcleo tiene dimensión m entonces, podemos considerar matrices con m columnas

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_r & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\alpha_i \neq 0, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0$ y las matrices A correspondientes.

Ejemplo 3.23. Supongamos que $n = 5$ y consideremos la familia B_α de núcleos dados por

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la familia $\{A_\alpha\}, \alpha \in \mathbb{Z}$ de matrices definidas por:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $A_\alpha B_\alpha = 0$, es decir para cada α, B_α es una matriz dual de Gale para A_α. El hecho que A_α tenga columnas repetidas es una consecuencia del Lema **??**.
Observemos que los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = -1$ ya fueron tratados en el Ejemplo 2.31, y que si $\alpha \notin \{0, -1\}$ entonces A_α no es piramidal. La dimensión de X_{A_α} es 2.
En este caso, consideremos las rectas $L_1 : y = 0$ y $L_2 : x = 0$, y la suma de los vectores $(1+\alpha, 0), (-\alpha, 0)$ y $(-1, 0) \in L_1$ y $(0, 1), (0, -1) \in L_2$ es nula. Por lo tanto, el Teorema 3.7 implica que la variedad X_{A_α} es autodual. Concluimos que para todo $\alpha \notin \{0, -1\}$, la variedad X_{A_α} es autodual y singular ya que n es impar.

4. El caso fuertemente autodual

Terminamos este capítulo con la noción de variedad fuertemente autodual.

Definición 3.24. Decimos que X_A es *fuertemente autodual* si $\eta(X_A) = X_A^*$, o sea si X_A coincide con X_A^* con la identificación η entre $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})^*$ descrita al principio de la sección 1 del capítulo 2.

Entonces, con esta identificación y abusando de las notaciones, claramente las variedades fuertemente autoduales son variedades autoduales y podemos considerar que $f = id$ en la Definición 2.7 y notaremos $X_A = X_A^*$.

Observación 3.25. Si bien el isomorfismo η no es $(\mathbb{C}^*)^d-$ equivariante, la noción de variedad tórica fuertemente autodual es de interés por sus aplicaciones en el estudio de sistemas $A-$ hipergeométricos de ecuaciones diferenciales $\big([\mathbf{12}]\big)$.

Más aún tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.26. *Sea $A \in \mathbb{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ no piramidal.*
Entonces X_A es fuertemente autodual si y solamente si $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset X_A$.

Demostración. Si X_A es fuertemente autodual entonces $X_A^* = X_A$. Como $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset X_A^*$ se tiene que $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset X_A$.
Al ser A no es piramidal, existe $p \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1}$. Como $Ker(A) \subset X_A$ se tiene que $p \in \mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \cap \mathbb{T}^{n-1} \subset X_A \cap \mathbb{T}^{n-1} = \mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)$. Entonces $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)$. Nuevamente como $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset X_A = \overline{\mathcal{O}\big([1 : \cdots : 1]\big)}$ entonces $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big) \subset \overline{\mathcal{O}(p)}$. Por el Teorema 3.2 se tiene que X_A es autodual, luego $p * X_A =$

X_A^*. Finalmente $p * X_A = p * \overline{\mathcal{O}([1:\cdots:1])} = \overline{\mathcal{O}(p)} = \overline{\mathcal{O}([1:\cdots:1])} = X_A$ lo que termina de probar que $X_A = X_A^*$.

□

Podemos adaptar el Teorema 3.7 al caso de las variedades fuertemente autodual.

TEOREMA 3.27. *Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$ no piramidal y B una matriz dual de Gale de A. Entonces, con las mismas notaciones que en el Teorema 3.7,*

$$X_A \textit{ es fuertemente autodual} \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{(a) para toda recta } L \textit{ que pasa por el origen} \\ \textit{se tiene que } \sum\limits_{v_i \in L} v_i = 0 \\ \textit{(b)} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ v_{ji}>0}}^{n} v_{ji}^{v_{ji}} = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ v_{ji}<0}}^{n} v_{ji}^{-v_{ji}}, \forall\, i = 1,\dots,n-d. \end{cases} \tag{3.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Como las variedades fuertemente autoduales son autoduales, la prueba de este teorema es identica que la del Teorema 3.7, por lo que retomaremos las mismas notaciones. La Proposición 3.26 implica que X_A es fuertemente autodual si y sólo si $\mathbb{P}(Ker(A)) \cap \mathbb{T}^{n-1} \subset X_A \cap \mathbb{T}^{n-1}$. Es decir si y sólo si:

$$\prod_{\substack{j=1 \\ v_{ji}>0}}^{n} \langle s, v_j\rangle^{v_{ji}} = \prod_{\substack{j=1 \\ v_{ji}<0}}^{n} \langle s, v_j\rangle^{-v_{ji}}, \ \ \forall\, i = 1,\dots,n-d.$$

de donde se deduce el teorema a partir del Teorema 3.7.

□

OBSERVACIÓN 3.28.
1. en esta última igualdad polinomial, lo que difiere de la demostración del Teorema 3.7 es el ajuste de la constante multiplicativa. En este caso es 1, pero en el caso autodual dependía del punto p_0. Este ajuste se hace a partir de la segunda condición.
2. Si b_i un vector del núcleo con todas sus coordenadas no nulas entonces la condición (b) del Teorema 3.27 se escribe $\prod\limits_{j=1}^{n} b_{ji}^{b_{ji}} = 1$ para todo $i = 1,\dots,n-d$.

EJEMPLO 3.29. En el Ejemplo 3.18, la variedad X_A es fuertemente autodual. Efectivamente como $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces para los vectores columnas de B,

$w_1 = (-2, -2, -2, -2, 4, 1, 1, 1, 1)$ y $w_2 = (1, 1, 2, 0, -2, -1, 0, -1, 0)$ se tiene que:

$$\prod_{\substack{j=1 \\ v_{j1}>0}}^{9} v_{j1}^{v_{j1}} = 4^4 1^1 1^1 1^1 1^1 = (-2)^2(-2)^2(-2)^2(-2)^2 = \prod_{\substack{j=1 \\ v_{j1}<0}}^{9} v_{j1}^{-v_{j1}},$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ v_{j2}>0}}^{9} v_{j2}^{v_{j2}} = 1^1 1^1 2^2 = (-2)^2(-1)^1(-1)^1 = \prod_{\substack{j=1 \\ v_{j2}<0}}^{9} v_{j2}^{-v_{j2}}.$$

Finalizamos esta sección hallando una condición sobre las matrices de Lawrence para que las variedades tóricas correspondientes sean fuertemente autoduales.

TEOREMA 3.30. *Sea A una matriz de Lawrence no piramidal. Entonces:*
X_A es fuertemente autodual si y sólo si existen filas de M tal que su suma tiene todas sus coordenadas impares.

DEMOSTRACIÓN. Sea A una matriz de Lawrence no piramidal. Por el Corolario 3.16, sabemos que X_A es autodual. Para ver cuando X_A es fuertemente autodual basta aplicar la condición (b) del Teorema 3.27 a los vectores de $\mathbb{P}\big(Ker(A)\big)$. Si B es una matriz dual de Gale de A, sus vectores columnas son de la forma $(-b, b)$ con $b \in Ker(M)$, $M = ((m_{ij})) \in \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{Z})$.
La variedad X_A es autodual si y sólo si $\prod_{\substack{j=1 \\ v_{ji}>0}}^{n} v_{ji}^{v_{ji}} = \prod_{\substack{j=1 \\ v_{ji}<0}}^{n} (-v_{ji})^{-v_{ji}}$ para todo $i = 1, \ldots, n-d$.

Es decir, si para todo $i = 1, \ldots, n-d$, X_A es autodual si y sólo si $(-1)^{\sum_{j=1}^{n} v_{ji}} = 1$, lo cual equivale a pedir que para todo $b = (b_1, \ldots, b_n) \in Ker(M)$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} b_i$ es par. Esta condición equivale a $\sum_{i=1}^{n} b_i \equiv 0 \pmod 2$, es decir, $1.b_1 + 1.b_2 + \cdots + 1.b_n \equiv 0 \pmod 2$, lo cual implica que $(1, \ldots, 1)$ pertenece al subespacio de filas de M ($\bmod\ 2$).
Entonces si $(1, \ldots, 1)$ pertenece a $\big\langle(\overline{m_{11}}, \ldots, \overline{m_{1n}}), \ldots, (\overline{m_{d1}}, \ldots, \overline{m_{dn}})\big\rangle_{\mathbb{Z}^2} \subset \mathbb{Z}_2^n$, siendo $\overline{m_{ij}} = \begin{cases} 0, & m_{ij} \text{ es impar;} \\ 1, & m_{ij} \text{ es par} \end{cases}$, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{Z}_2$ tales que el vector $(1, \ldots, 1) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\overline{m_{i1}}, \ldots, \overline{m_{in}})$. Luego si suponemos que los r primeros escalares son no nulos tenemos que $(1, \ldots, 1) = \sum_{i=1}^{r}(\overline{m_{i1}}, \ldots, \overline{m_{in}})$, es decir $\sum_{i=1}^{r} m_{ik}$ es impar $\forall\ k = 1, \ldots, n$. $\square$

Ejemplo 3.31. El Teorema 3.30 permite afirmar que, por provenir de matrices de Lawrence del tipo $A = \begin{pmatrix} & I_n & & & & I_n & & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, las inmersiones de Segre $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{2n-1}$ son fuertemente autoduales. Más aún, la variedad tórica X_A tiene dimensión n en $\mathbb{P}^{2n-1}$ y como es autodual, X_A^* es defectiva excepto cuando $n = 2$.

Bibliografía

[1] A.Borel, *Linear Algebraic Groups*, second edition. Graduate Texts in Mathematics, **52**. New York, Springer, 1991.

[2] E. Cattani; R. Curran, *Restriction of A- Discriminants and dual defect toric varieties*, preprint, math. AG/0510615. Journal of Symbolic Computation, to appear.

[3] A.Dickenstein; B.Sturmfels, *Elimination theory in codimension two*, Journal of Symbolic Computation, 34 (2002), 119-135.

[4] A. Dickenstein; E.M:Feichtner; B.Sturmfels, *Tropical Discriminants*, Journal of the American Mathematical Society, (2007), to appear.

[5] S. Di Rocco, *Toric manifolds with degenerate dual variety and defect polytopes*, preprint, math.AG/0305150, Proc. of the London Math. Society, to appear.

[6] S.Di Rocco; C.Casagrande, *Proyective Q-factorial toric varieties covered by lines*, preprint, math. AG/0512385.

[7] L.Ein, *Varieties with small dual varieties*, I, Invent. Math. 86 (1986), no. 1, 63-74.

[8] L.Ein, *Varieties with small dual varieties*, II, Duke. Math. J. 52 (1985), no. 4, 895-907.

[9] D.Eisenbud, *Commutative Algebra. With a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, **150**. New York, Springer, 1995.

[10] W.Fulton, *Introduction to toric varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. Princeton, Princeton University Press, 1993.

[11] I.M.Gelfand; M.M.Kapranov; A.V.Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* Boston, Birkhäuser, 1994.

[12] I.M.Gelfand; M.M.Kapranov y A.V.Zelevinsky, *Hypergeometric functions and toral manifolds.* Funct. Anal. Appl. 23 (1989), no. 2, 94106.

[13] J.Harris, *Algebraic geometry, a first course.* Graduate Texts in Mathematics, **133**. New York, Springer, 1992.

[14] R.Hartshorne, *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, **52**. New York, Springer, 1977.

[15] J.Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **21**. NewYork, Springer, 1981.

[16] V.L.Popov, *Self-dual algebraic varieties and nilpotents orbits.* Proceedings of the International Colloquium on Algebra, Arithmetic and Geometry, Mumbai, 2000, Tata Inst. Fund. Research, Narosa Publ. House, 2002, 509-533.

[17] V.L.Popov; E.A.Tevelev, *Self-dual projective algebraic varieties associated with symmetric spaces.* (English) Popov, Vladimir L. (ed.), Algebraic transformation groups and algebraic varieties. Proceedings of the conference on interesting algebraic varieties arising in algebraic transformation group theory, Vienna, Austria, October 22-26, 2001. Berlin: Springer. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 132. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups 3, 131-167 (2004). MSC 2000: *14M.

[18] E.A.Tevelev, *Projective duality and homogeneous spaces*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 133. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups 4. New York, Springer, 2005.